Mathematik Neu Denken.

Empfehlungen zur Neuorientierung der
universitären Lehrerbildung im Fach Mathematik
für das gymnasiale Lehramt.

Deutsche Telekom Stiftung

Mathematik Neu Denken.

Empfehlungen zur Neuorientierung der
universitären Lehrerbildung im Fach Mathematik
für das gymnasiale Lehramt.

Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher, Prof. Dr. Rainer Danckwerts, Prof. Dr. Gregor Nickel

UNIVERSITÄT SIEGEN

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Deutsche Telekom Stiftung

An den Empfehlungen haben folgende Personen mitgewirkt:
Prof. Dr. A. Beutelspacher (Gießen), Prof. Dr. R. Danckwerts (Siegen), Prof. Dr. L. Hefendehl-Hebeker (Duisburg-Essen), Prof. Dr. G. Nickel (Siegen), Prof. Dr. J. Sjuts (Osnabrück, Studienseminar Leer), Prof. Dr. H.-O. Walther (Gießen).
Assoziiertes Mitglied der Expertengruppe war Prof. Dr. M. Neubrand (Oldenburg).

Die umfassende wissenschaftliche Redaktion und Koordination lag in den Händen von G. Wickel (Siegen), unterstützt von Dr. M.-A. Zschiegner (Gießen) und T. Witteck (Siegen). Prof. Dr. B. Artmann (Göttingen), Prof. Dr. T. Bauer (Marburg) und Prof. Dr. N. Henze (Karlsruhe) haben die Arbeit der Expertengruppe durch ihre Expertise bereichert.

Die gut einjährige Programmarbeit wurde großzügig gefördert von der Deutsche Telekom Stiftung sowie den Universitäten Gießen und Siegen.

Inhalt.

Vorwort.

Bessere Lehrer für besseren Mathematikunterricht.

Keine Wissenschaft durchdringt die unterschiedlichsten Bereiche so wie die Mathematik. Sämtliche Lebens- und Arbeitsbereiche werden von Mathematik bestimmt: Der Einkauf im Supermarkt genauso wie der Bau eines Hauses oder die Nutzung des Navigationssystems im Auto. Die Straßenplanung, die Flugzeugherstellung, der Wetterbericht – überall steckt Mathematik drin.

Die Mathematik bestimmt unseren Alltag und hilft Probleme zu analysieren, zu strukturieren, zu lösen. Sie überschreitet ständig die Grenzen hin zu anderen Wissenschaften und leistet einen unersetzlichen Beitrag zu Innovationen in vielen Arbeits- und Wissensgebieten. Trotz dieser Bedeutung und trotz damit einhergehender hervorragender Berufschancen für Mathematiker wählen Abiturienten viel zu selten ein mathematisches Studium. Der Grund: Sie haben Mathematik in der Schule oft als zu theoretisch, zu wirklichkeitsfern - kurz: als „Schreckensfach“ wahrgenommen.

Lehrerinnen und Lehrer spielen eine entscheidende Rolle dabei, welches Bild von Mathematik sich Schüler machen. Mathematik darf nicht auf eine Ansammlung von Lösungsverfahren für bestimmte Aufgabentypen reduziert werden, sie darf nicht als fertiges Gebäude von Lehrsätzen ohne Baupläne erscheinen. Daher ist es für zukünftige Lehrerinnen und Lehrer von prägender Bedeutung, bereits im Studium zu erfahren, dass es in der Mathematik unzählige offene Fragen gibt, durch deren Bearbeitung sich die Wissenschaft auch heute noch dynamisch weiterentwickelt.

Bedauerlicherweise liegt in der Lehrerausbildung eine der großen Schwachstellen unseres Bildungssystems. Sie wird an den Hochschulen nicht ernst genug genommen, muss immer wieder hinter der Forschungsexzellenz zurückstehen. Eine Orientierung des Studiums am Lehrerberuf und eine enge und frühzeitige Verzahnung von fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Ausbildung sind deshalb von großer Bedeutung. Gegenwärtig ist der Abstand zwischen der konkreten fachinhaltlichen Ausbildung und der fachdidaktischen Umsetzung an den Universitäten oft zu groß. Zukünftige Lehrerinnen und Lehrer brauchen aber ein solides und tragfähiges Wissen darüber, welche Probleme mit dem Lernen mathematischer Begriffe, Definitionen, Sätze und Beweise verbunden sein können oder welche typischen Fehlerkonzepte Kinder und Jugendliche beim Umgang mit der Mathematik entwickeln.

Die Universitäten Gießen und Siegen waren die bundesweit ersten Hochschulen, die angehenden Mathematiklehrern für das Gymnasium ein spezielles, auf den Lehrerberuf zugeschnittenes Grundstudium anboten. Es unterscheidet sich durch spezielle Lehrveranstaltungen, in denen vor allem fachdidaktische Kompetenzen vermittelt werden. Möglich wurde das durch das Forschungs- und Entwicklungsprojekt Mathematik Neu Denken, das die Deutsche Telekom Stiftung von 2005 bis 2008 an beiden Universitäten unterstützt hat und das in beiden Hochschulen zu nachhaltigen Veränderungen der Studienstruktur führte. Die Leitung lag bei Professor Albrecht Beutelspacher (Gießen) und Professor Rainer Danckwerts (Siegen).

Eine logische Weiterentwicklung des Projektes ist es, das gesamte Mathematik-Lehramtsstudium „neu zu denken“. Wie das gelingen kann, hat eine Expertengruppe unter Leitung der Professoren Beutelspacher, Danckwerts und Nickel untersucht und daraus Thesen abgeleitet. Diese Empfehlungen liegen nun vor. Ich wünsche ihnen eine große Verbreitung und danke den Experten für wichtige und richtungsweisende Arbeit.

Bonn, im Juli 2010

Dr. Klaus Kinkel
Vorsitzender Deutsche Telekom Stiftung

Einführung.

Mathematik gehört zu den Schlüsseltechnologien unserer hoch technisierten Welt: Ob es um die Optimierung von Transportsystemen, um Wahlprognosen, Modelle für den Klimawandel oder Fragen der Datensicherheit geht, überall ist – jenseits des bürgerlichen Rechnens – hochentwickelte Mathematik im Spiel.

Und mehr noch, die Mathematik ist ein bedeutendes Kulturgut: Seit Jahrtausenden hat sie das Weltverstehen der Menschen begleitet, in besonderer Weise seit der griechischen Antike, weil diese die Perspektive der Anwendbarkeit überschritten und die Mathematik als argumentative Wissenschaft etabliert hat.

Beide Wesenszüge – Mathematik als Schlüsseltechnologie und als Kulturgut – werden von der Öffentlichkeit kaum bemerkt. Man kann sogar mit Beifall rechnen, wenn man öffentlich bekennt, von Mathematik nichts zu verstehen und „in Mathe immer schlecht" gewesen zu sein.

Hieraus entsteht eine doppelte Bildungsnotwendigkeit: Zum einen brauchen wir eine ausreichende Zahl mathematisch qualifizierter Fachkräfte, zum anderen den mündigen Bürger, der sich über die Rolle der Mathematik in unserer Gesellschaft ein Urteil bilden kann. Wenn man sich nun klarmacht, dass mathematische Bildung – im Unterschied zu anderen Fächern wie Sprachen, Musik, Kunst oder Sport – fast ausschließlich über schulischen Unterricht vermittelt wird, haben Mathematiklehrerinnen und -lehrer eine entscheidende Aufgabe.

Dreh- und Angelpunkt für eine Verbesserung des Mathematikunterrichts ist die Lehrerbildung. In erster Linie ist hier die universitäre Phase der Ausbildung gefordert. Als neuralgischer Punkt gilt das Studium für das gymnasiale Lehramt, weil es dort traditionell kaum gelingt, die Kluft zwischen der Wissenschaft Mathematik und dem Berufsbild des Mathematiklehrers zu schließen. Dies führt in der Regel dazu, dass die angehenden Lehrerinnen und Lehrer sich nur unzureichend mit ihrem Fach identifizieren.

Hier setzen wir an. Ausgehend von Erfahrungen aus einem mehrjährigen Modellversuch an den Universitäten Gießen und Siegen hat eine Expertengruppe aus Mathematik und Mathematikdidaktik Empfehlungen für eine Neuorientierung der universitären Lehrerbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt erarbeitet. Wir sehen Änderungsbedarf sowohl auf der Seite der Studieninhalte als auch bei den Lehr- und Lernformen. Unsere Empfehlungen stellen wir hiermit zur Diskussion.

Den Mitgliedern der Expertengruppe danken wir herzlich für die konstruktive, produktive und inspirierende Zusammenarbeit.

Gießen, Siegen, im Juli 2010

Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher Prof. Dr. Rainer Danckwerts Prof. Dr. Gregor Nickel

Zentrale Thesen.

Neuorientierung der Mathematiklehrerausbildung notwendig.

1. Angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer für die Gymnasien müssen während des Studiums eine aktive Beziehung zur Mathematik als Wissenschaft und als Kulturgut entwickeln, um das Fach im Mathematikunterricht und darüber hinaus souverän vertreten zu können.

2. Das Lehramtsstudium Mathematik muss den künftigen Pädagogen Erfahrungen ermöglichen, die neben der fachmathematischen Seite auch zur Reflexion über Mathematik und über das Lehren und Lernen von Mathematik Anlass geben.

3. Ein neu konzipierter Studiengang muss die fachwissenschaftliche Ausbildung mit der fachdidaktischen eng verzahnen.

4. Die Fachmathematik muss eine starke elementarmathematische Komponente enthalten, die nach Möglichkeit an schulmathematische Erfahrungen anknüpft und auch Forschungserfahrungen „im Kleinen“ ermöglicht.

5. Die fachmathematische Ausbildung muss Erfahrungen mit einer „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“ als Schnittstelle zwischen Fachwissenschaft und Fachdidaktik ermöglichen.

6. Die fachmathematische Komponente muss verbindliche Veranstaltungen zur historisch-genetischen oder philosophischen Reflexion über Mathematik enthalten.

7. Die fachdidaktische Ausbildung thematisiert primär die Aufgabe, mathematische Inhalte zugänglich zu machen; gleichzeitig setzt sie einen starken Akzent auf die Lerner-Perspektive und umfasst auch bildungstheoretische Aspekte.

8. Die fachdidaktische Ausbildung muss vermehrt Verständnis für das mathematische Denken von Kindern und Jugendlichen wecken und verstärkt das differenzierte und individualisierte Diagnostizieren und Fördern vermitteln.

9. Methodisch kommt es darauf an, Formen des Lehrens und Lernens zu bevorzugen, die die Studierenden in der eigenaktiven Konstruktion ihres Wissens nachhaltig unterstützen.

10. Mathematik lernen bedeutet, neben der eigenen Auseinandersetzung mit dem Thema, die Möglichkeit des Austausches mit anderen zu haben. Ein unterstützendes Mentorensystem wäre hier hilfreich, wofür eine spezifische Hochschuldidaktik zu entwickeln ist.

Ausgangslage und Ziele.

Mathematik Neu Denken.

Das Pilotprojekt (2005 – 2008).

Bisherige empirische Untersuchungen zum Mathematikunterricht und zum Professionswissen der Fachlehrer(innen) lassen darauf schließen, dass neben der Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts auch ein Umdenken in der mathematischen Ausbildung der zukünftigen Lehrerinnen und Lehrer stattfinden muss. Prominent und mehr als 80 Jahre alt ist die inzwischen viel zitierte Feststellung des einflussreichen Mathematikers Felix Klein:

> „Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergißt er daher alle diese Sachen rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit der Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen."
>
> Klein 1924

Dieser Befund ist nach wie vor aktuell: Noch immer hinterlässt der fachwissenschaftlich orientierte Teil des Mathematikstudiums wenig Spuren, und der ohnehin als zu gering empfundene fachdidaktische Anteil wird als kaum verbunden mit der fachmathematischen Ausbildung erlebt.

> „Wofür ich hier plädiere ist ein Nachdenken, ob und inwiefern die fachliche Ausbildung der Gymnasiallehrer spezifisch erfolgen könnte, ohne das akademische und universitäre Niveau zu verlassen."
>
> Reichel 2000, S. 35

Vor diesem Hintergrund entstand – bestärkt durch aktuelle empirische Befunde – das Pilotprojekt **Mathematik Neu Denken** zur Neuorientierung der gymnasialen Lehrerausbildung im Fach Mathematik (Vgl. Beutelspacher; Danckwerts 2008).

Ein zentraler Leitgedanke des Projekts war die aktive Konstruktion eines angemessenen „Mathematischen Weltbildes". Das Mathematische Weltbild beschreibt einen vielschichtigen Komplex „von Einstellungen gegenüber (Bestandteilen) der Mathematik" und beinhaltet „subjektiv implizites Wissen über die Mathematik, das ein weites Spektrum an Vorstellungen umfasst" (Törner; Grigutsch 1994, S. 237): Was macht das Wesen und den Bildungswert von Mathematik aus? Was sind deren zentrale Ideen und Aufgaben? Was geschieht beim Lehren und Lernen von Mathematik?

Mit solchen Fragen werden in natürlicher Weise fachdidaktische Denkweisen angebahnt. Die frühe Verbindung von Mathematik und ihrer Didaktik war erklärtes Projektziel, im Einklang mit der jüngsten Denkschrift der einschlägigen Verbände DMV und GDM:

> „Eine enge Verzahnung von fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Ausbildung erscheint uns essenziell. Gegenwärtig ist der Abstand zwischen der konkreten fachinhaltlichen Ausbildung und der fachdidaktischen Umsetzung oft zu groß. Es sollte angestrebt werden, dass Fachwissenschaft und Fachdidaktik möglichst stark miteinander verzahnt werden und in Teilen sogar parallel laufen."
>
> Stroth et al. 2001, S. 4

Ein weiterer Leitgedanke des Projekts nahm den von Klein beschriebenen Befund auf: Ein fachlich souveräner Umgang mit den Themen des Mathematikunterrichts bahnt sich nicht von selbst an. Hierzu bedarf es eigener Lehrveranstaltungen, die die Schulmathematik vom höheren (aber nicht primär strukturmathematischen) Standpunkt behandeln und sich insbesondere der Analyse ihres Sinns und ihrer Bedeutung widmen. Dies ist ein eigener Anspruch und erfordert eine spezifische Anstrengung, die nicht in der Begegnung mit kanonisierter Hochschulmathematik aufgeht. Eine derart konzipierte Veranstaltung war etwa die „Schulanalysis vom höheren Standpunkt" im ersten Studiensemester.

Von höchster Priorität war schließlich der angestrebte Paradigmenwechsel im Umgang mit der Wissenschaft Mathematik:

> „Durch den klassischen, systematischen, axiomatisch-deduktiven Aufbau der Fachveranstaltungen wird den Studierenden die Wissenschaft Mathematik in der Regel als fertiges, in sich geschlossenes System vermittelt. Dabei spielen die ursprünglichen Problemstellungen, die Prozesse der Begriffsbildung und Theorieentwicklung der jeweiligen Gebiete, nur eine untergeordnete Rolle. Die Methoden der Vermittlung sind einseitig fixiert auf die reine Instruktion durch die klassische Vorlesung. Die so akzentuierte, traditionelle Fachausbildung ist eher produkt- und weniger prozessorientiert, und sie setzt eher auf die Instruktion durch die Lehrenden als auf die aktive Konstruktion des Wissens durch die Lernenden. In der Balance von Produkt und Prozess sowie von Instruktion und Konstruktion liegt der Schlüssel für eine Verbesserung der fachbezogenen Lehrerausbildung."
>
> Danckwerts; Prediger; Vasarhelyi 2004, S. 48

Die Prozessorientierung wurde unter anderem dadurch realisiert, dass genetische Aspekte zur Geschichte und Philosophie der Mathematik fortgesetzt und explizit integriert waren.

So kann etwa eine ideengeschichtliche (nicht lediglich ereignisgeschichtliche) Sicht erhebliche Wirkung entfalten. Dass um die etablierten mathematischen Begriffe über lange Zeit gerungen wurde, ist für den Lernenden (und für den Lehrenden) eine entlastende, motivierende und sinnstiftende Erfahrung, zumal das eigene Ringen um Verstehen häufig ähnlich verläuft. Den im Projekt intendierten Umgang mit der Mathematik haben die Fachverbände in ihren jüngsten Empfehlungen an die Kultusministerkonferenz der Länder so beschrieben:

> „Der Einblick in die Bedeutung der Mathematik für die moderne Welt gehört zum Kern des Studiums für alle Lehrämter. Studierende aller Lehrämter sollen der Mathematik als Kulturleistung und den für sie charakteristischen Wissensbildungsprozessen begegnen. Daher gehört zur Vermittlung mathematischer Inhalte grundsätzlich auch, ihren Beitrag zur mathematischen Bildung auszuweisen und sie in der historischen Genese zu verorten.“ Empfehlungen an die KMK 2008, S. 1

Die Notwendigkeit von methodischen Veränderungen war von folgender Überzeugung getragen: Guter Mathematikunterricht bedarf der fruchtbaren Balance zwischen Instruktion (der Schüler durch den Lehrer) und individueller Konstruktion (durch den Schüler selbst). Angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer müssen diese Balance selbst erfahren; sie müssen in ihrem eigenen Lernprozess erleben, wie mathematische Wissensbildung geschieht. Daher gilt es, insbesondere die klassischen Übungen zu den Vorlesungen zu restrukturieren: Sie müssen der ausgewiesene Ort für die Erfahrung und Thematisierung von fachlichen Lernprozessen sein.

Das volle Studium im Blick.

Weiterentwicklung des Projekts.

Die Idee von **Mathematik Neu Denken** wurde als Pilotprojekt für das erste Studienjahr konzipiert und in Gießen (für die Lineare Algebra) und Siegen (für die Analysis) mehrfach erfolgreich realisiert. Der programmatische Auftrag ist nun, die Projektidee auf ein volles Mathematikstudium für das gymnasiale Lehramt konsequent auszudehnen. Dazu wurden Empfehlungen formuliert und ein idealtypischer Studienplan konkretisiert, der auch unter vergleichsweise traditionellen Bedingungen realisierbar erscheint. Empfehlungen und Studienplan finden sich in dieser Veröffentlichung ab Seite 18 und auf Seite 54.

Forschungen zur Ausbildung der Mathematiklehrerinnen und -lehrer und insbesondere die COACTIV-Studie (Vgl. Krauss; Neubrand et al. 2008) haben gezeigt, wie wichtig es ist, dass die angehenden Lehrerinnen und Lehrer in ihrem Studium durch eine fundierte fachbezogene Professionalisierung sinn- und identitätsstiftende Erfahrungen machen können. Wesentlich erscheint die frühe und konsequente Integration hochschulmathematischer, schulfachbezogener und fachdidaktischer Perspektiven sowie eine Methodik, die auf die eigenaktive Konstruktion des Wissens setzt.

> „Die Expertenlehrkraft verfügt über viel fachdidaktisches Wissen und viel Fachwissen, sie hat eine konstruktivistische Sichtweise von Lernen und berichtet von angemessener Disziplin in der eigenen Klasse. Sie ist weder der Meinung, Mathematik sei hauptsächlich eine Sammlung von Rezepten, die man nur erinnern und anwenden muss, noch glaubt sie, dass Mathematik am besten durch Zuhören gelernt werden kann. Sie vertritt ebenfalls nicht die Auffassung, dass Schüler jederzeit kleinschrittig angeleitet werden müssen.“ Krauss; Neubrand et al. 2008, S. 248

Demgemäß sind es im Kern folgende maßgebliche Arbeitsfelder, die den Rahmen einer Neuorientierung des Lehramtsstudiums abstecken können: Der fachmathematische Kanon, die Stellung und Aufgabe der Didaktik der Mathematik und die Lehr- und Lernformen des Studiums. Hierbei wird für folgende Akzentuierung plädiert:

In der Fachwissenschaft Mathematik für
- eine Begegnung mit dem Reichtum der Disziplin Mathematik,
- eine hinreichend explizite schulmathematische Orientierung,
- eine Einbeziehung der Geschichte und Philosophie der Mathematik,
- eine Reflexion der für die Mathematik typischen Denk- und Arbeitsweisen,
- eine Ermöglichung eigener wissenschaftlicher Arbeit „im Kleinen“,

in der Mathematikdidaktik für

- eine Einbeziehung bildungstheoretischer Aspekte,
- eine hinreichend breit verstandene stoffdidaktische Komponente,
- eine Beachtung von Denk- und Verstehensprozessen bei Lernenden,
- eine geeignete Einbeziehung diagnostischer Fragestellungen.

Insgesamt stützt sich die programmatische Arbeit auf Grundüberzeugungen, die sich in den folgenden beiden Zitaten aus der einschlägigen Diskussion spiegeln:

> „[...] Pädagogisches Wissen, Fachwissen und Fachdidaktisches Wissen. Diese drei Kategorien bilden aus heutiger Sicht die allgemein akzeptierten Kernkategorien des Professionswissens von Lehrkräften und es besteht kein Zweifel, dass allen dreien eine zentrale Bedeutung bei den professionellen Aufgaben der Lehrerinnen und Lehrer zukommt." Krauss; Neubrand et al. 2008, S. 226

> „Die Hinführung zu kulturell akkumuliertem, als wertvoll und nützlich erachtetem Wissen als Hintergrund und Basis für den individuellen Aufbau von Weltverstehen und Handlungskompetenzen ist nur möglich, wenn Lehrkräfte in ihren Fächern über ein breites Wissen verfügen, welches deutlich über den Horizont des unmittelbaren Unterrichtsstoffes hinausgeht. In der Lehrerbildung muss dieses fächerbezogene Wissen von den Studierenden erworben werden, wobei gleichzeitig der bildungstheoretische Aspekt der Begründung der Inhaltsauswahl sowie der didaktisch-methodische Aspekt der Organisation und Unterstützung von Lernen mit berücksichtigt werden muss." Terhart 2000, S. 99

Das Ziel der universitären Ausbildung von Gymnasiallehrerinnen und -lehrern im Fach Mathematik liegt im Aufbau eines kognitiven und motivationalen Fundaments, das dem berechtigten Anspruch von Lehramtsstudierenden nach fachbezogener Professionalität Rechnung trägt.

Empfehlungen.

Im Folgenden werden die Elemente eines „idealtypischen“ Studienplanes für das gymnasiale Lehramt dargestellt. Diese sind zunächst inhaltlich in die fachmathematische und die fachdidaktische Komponente gegliedert; ein dritter Abschnitt ist den Lehr- und Lernformen gewidmet. Der gesamte Studienaufbau ist am Ende des Berichts nochmals in einer grafischen Übersicht dargestellt. Dabei sind die angegebenen Semesterwochenstunden als Orientierungshilfe für das vorgeschlagene relative Gewicht der Veranstaltungen anzusehen. Die konkrete Ausgestaltung ist den jeweiligen Verhältnissen anzupassen.

1. Die fachmathematische Komponente.

Mathematik als eine besondere Weise des Weltverstehens hat seit über 5.000 Jahren maßgeblichen Einfluss auf die kulturelle Entwicklung der Menschheit genommen, und das nicht nur in wirtschaftlichen oder technisch-naturwissenschaftlichen Anwendungen, sondern auch in der Geistes- und Kulturgeschichte. Neben dem selbstverständlichen Ziel solider fachmathematischer Kenntnisse und Fähigkeiten soll ein Mathematikstudium die Studierenden so ausrüsten, dass sie einen begründeten Standpunkt zur Mathematik als Teil unserer Kultur und zum Bildungswert des Faches Mathematik entwickeln können. Eine kohärente Verknüpfung von Fachmathematik und Didaktik der Mathematik ist dabei ein Gewinn für beide Komponenten. Wird diese Verknüpfung reflektiert, kann – in Verbindung mit einer elementarmathematischen Akzentuierung – dem Lehramtsstudium die bisher fehlende qualitative Mitte gegeben werden. Bildungsziel eines solchen Mathematikstudiums ist ein fachlich und affektiv belastbarer, reflektierter Standpunkt zur Mathematik.

Problembeschreibung.

Der Übergang von der Schule zum Studium ist gerade beim Studienfach Mathematik eine besonders schwierige Phase. Auf der einen Seite erwarten Schülerinnen und Schüler – im Gegensatz zu anderen Schulfächern – von ihrem Mathematikstudium kaum etwas, das über den Schulstoff hinausgeht und zugleich für einen Mathematiklehrer nützlich sein könnte. Auf der anderen Seite sind die Studierenden jedoch zu Beginn ihres Studiums inhaltlich und methodisch weit über das Schulniveau hinausgehenden Herausforderungen ausgesetzt; dies gilt qualitativ wie quantitativ. In der Regel werden die Anforderungen seitens der Fachmathematik ohne eine Differenzierung zwischen Fach- und Lehramtsstudierenden gestellt, wobei Letztere häufig als die fachlich Schwächeren eines Jahrgangs gelten und behandelt werden. Da die Lehramtsstudierenden eine anders geartete Motivation zur Auseinandersetzung mit den fachlichen Inhalten haben, nehmen sie den Bruch zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik als besonders verunsichernd wahr; vor allem die Nützlichkeit der Fachinhalte für das angestrebte Berufsziel und die eigene Befähigung zur Mathematik werden dabei infrage gestellt. So trägt das Studium bislang oft wenig zu einer positiven Identifikation mit dem Berufsbild und dem Fach bei.

Anforderungen an das Fachstudium.

Ein Mathematikstudium soll die Breite der Mathematik in Theorie und Anwendungen erfahrbar machen und dabei die Studierenden und deren durch die Schulmathematik erworbenen Standpunkt und ihren berechtigten Anspruch auf fachbezogene Professionalisierung besonders berücksichtigen. Zunächst geht es also um Kenntnisse und Fähigkeiten in den grundlegenden Teilgebieten der Mathematik, die Bezug zum Schulstoff haben. Dabei sollen die Studierenden lernen, mit zentralen Problemen, Konzepten, Methoden und Ergebnissen dieser Teildisziplinen umzugehen. Darüber hinaus sollen die Studierenden zu einer substanziellen Auseinandersetzung mit übergreifenden Fragen zur Mathematik befähigt werden. Gemeinsam mit Veranstaltungen, die die Mathematik etwa unter historischer oder philosophischer Perspektive diskutieren, könnte sich dies an folgenden Leitfragen orientieren:

- Was ist Mathematik?
- Wie und warum ist Mathematik „anwendbar"?
- Wie funktioniert Mathematik als Weltverstehen?
- Welche wichtigen Themen und grundlegenden Konzepte bzw. Probleme gibt es in der Mathematik?
- Welche „Stile" der Mathematik gibt es (etwa: Problemlöser versus Theoriekonstrukteur)?
- Welche wichtigen (aktuellen) Fragen und Probleme gibt es in der Mathematik?
- Wie verläuft die Genese mathematischer Konzepte und Theorien?

Bei der Neukonzeption des Studiums soll nicht nur über neu gedachte Standardvorlesungen nachgedacht werden, sondern auch über alternative Lernformen und Lehrinhalte, die beispielsweise als „Schulmathematik vom höheren Standpunkt", als Geschichte oder Philosophie der Mathematik oder auch als fachmathematische Überblicksveranstaltungen konzipiert sind.

Um als Mathematiklehrer(in) auch als Vertreter(in) des Fachs Mathematik in der Öffentlichkeit agieren zu können, um einen begründeten Standpunkt zum Wert des Faches Mathematik und zur Mathematik als Teil unserer Kultur entwickeln zu können, muss neben der **Breite** der Mathematik auch die **Tiefe** der Mathematik erfahren werden. Die Studierenden sollen wenigstens exemplarisch erkennen, welchen Reichtum, aber auch welche Grenzen die mathematische Forschung kennt. Ebenso soll den Studierenden die Möglichkeit geboten werden, eigene authentische Erfahrungen mit dieser Wissenschaft zu machen. In der Regel werden diese zwar kaum Teil aktueller mathematischer Forschung sein können, aber die eigene Auseinandersetzung, das selbstständige Ringen mit einem noch nicht vertrauten mathematischen Gegenstand, der auch elementarmathematischer Natur sein kann, stellt eine nicht zu unterschätzende Bereicherung des Bildes von der Wissenschaft Mathematik dar. So kann und soll Mathematik als Entwicklungsprozess, als jeweiliges Produkt einer Genese wahrgenommen werden.

Lernen ist „lebenslanges Lernen". Ein zentrales, aber bislang kaum realisiertes Ziel des Mathematikstudiums ist es, Studierende so zu befähigen und zu motivieren, dass sie als Lehrer(in) an fachlichen Fortbildungen teilnehmen können und wollen, um ihren fachwissenschaftlichen Horizont zu erweitern.

Zusammengefasst: Das Mathematikstudium ...

- vermittelt Kenntnisse und Fähigkeiten in grundlegenden mathematischen Disziplinen,
- gibt Anlass zur Erfahrung mathematischer Breite und Tiefe,
- schafft immer wieder explizite Bezüge zur Schulmathematik,
- zeigt die Mathematik als zentrales Element der Kulturentwicklung und thematisiert sie als Methode zur Welterklärung und -gestaltung,
- leitet an zur Reflexion über Mathematik und ihren Stellenwert in der Welt,
- kann Mathematik versprachlichen und zum Sprechen über Mathematik anregen,
- versetzt die Studierenden in die Lage, Mathematik in der Gesellschaft vermittelnd zu repräsentieren,
- regt zur reflektierten Nutzung des Mediums Computer an,
- ermutigt zu einer nachhaltigen fachbezogenen Fragehaltung,
- soll zu lebenslangem Lernen führen.

Schulmathematik vom höheren Standpunkt.

Die tragenden Säulen der Oberstufenmathematik sind (derzeit) die Lernbereiche Analysis, Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Stochastik. Die von dort mitgebrachten mathematischen Erfahrungen sind in aller Regel kalkül- und verfahrensorientiert. Nur selten verfügen die Studienanfänger(innen) über reichhaltige inhaltliche Vorstellungen zu den in der Schule behandelten mathematischen Begriffen, und sie können kaum zwischen einer formalen und einer inhaltlich-interpretierenden Ebene unterscheiden und übersetzen. Entsprechend verfügen Absolvent(inn)en der gymnasialen Oberstufenmathematik nur selten über präformale Vorgehensweisen und Begründungen, und sie sind in der Regel nicht vertraut mit Übergängen vom Intuitiven zum Präzisen. Genau diese Fähigkeiten gehören aber zum fachlichen Professionswissen angehender Mathematiklehrer(innen), ohne die ein verstehens- und vorstellungsorientierter Mathematikunterricht in den Sekundarstufen nicht wirksam unterstützt werden kann.

Um diese fachbezogenen Kompetenzen frühzeitig zu entwickeln und zugleich die erwünschte Verbindung von Fach- und Berufsfeldbezug sichtbar zu machen, erscheint es sinnvoll, in eigenen Lehrveranstaltungen vom Typ „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“ einen kritisch-konstruktiven Rückblick auf die Oberstufenmathematik anzustreben. Ziel ist eine Standpunktverlagerung weg von der vertrauten Beherrschung von Kalkülen hin zu einer verstehensorientierten begrifflichen Durchdringung. So verschiebt sich etwa im Rahmen einer „Schulanalysis vom höheren Standpunkt“ bei der Reflexion des Ableitungsbegriffs der Akzent vom syntaktischen Ableitungskalkül („Wie wird abgeleitet?“) hin zur semantischen Seite des Begriffs („Was bedeutet die Ableitung?“). Ziel ist die Analyse des inhaltlichen Aspektreichtums dieses Begriffs, etwa repräsentiert durch das Grundverständnis als Tangentensteigung, als lokale Änderungsrate oder über die lokale Linearisierung mit je eigenem spezifischen Nutzen. Auf diese Weise entwickelt sich ein umfassendes Begriffsverständnis.

Solche Lehrangebote sind einerseits anschlussfähig für die fortschreitende Formalisierung in den entsprechenden Basisvorlesungen der kanonischen Hochschulmathematik und tragen zu deren Verständnis bei, andererseits bieten sie die passende fachliche Plattform für eine mathematikdidaktische Vertiefung im engeren Sinne.

Eine so konzipierte „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“ bildet eine **Schnittstelle** zwischen Hochschulmathematik und Mathematikdidaktik, die mit ihrer definierten Zielsetzung zwischen beiden Polen liegt, ohne in einem der beiden aufzugehen.

Elementarmathematik.

Das Fach Mathematik wird in universitären Vorlesungen in der Regel in Darstellungen präsentiert, die sich in einer langen Entwicklung herausgebildet haben und Kriterien optimaler Systemtauglichkeit genügen. Damit haben sich die Konzepte aber zumeist weit von den Phänomenen entfernt, zu deren gedanklicher Organisation sie ursprünglich entwickelt wurden, und es wird nicht von selbst klar, welche Formen der Erschließung und Rekonstruktion der Welt hier am Werk sind. Folglich begegnet der Vorlesungsstoff den Studierenden wie ein entrückter Formalismus, der hohe technische Anforderungen stellt, dessen Sinn und Bedeutung sich aber nur mühsam oder gar nicht erschließt.

Werden solche Erfahrungen dominant, so erzeugen sie ein Mathematikbild, das für die künftige Aufgabe als Lehrer oder Lehrerin nicht nur nicht hilfreich, sondern sogar kontraproduktiv sein kann. Die Studierenden weichen zwangsläufig in „systemkonforme Bewältigungskonzepte" aus und verpassen die Chance, eine authentische Begegnung mit Mathematik zu erleben und fachspezifische Denkweisen auszubilden, die sie später in schulmathematischem Kontext an ihre Schülerinnen und Schüler weitervermitteln sollen. Die Studierenden müssen ein differenziertes Bewusstsein entwickeln können über

- die Art des gedanklichen Zugriffs, den die Mathematik vornimmt,
- die besonderen Sichtweisen und Methoden der Wissenschaft,
- den Beitrag, den die Mathematik zur Gestaltung der Welt leistet.

In Bezug auf die Ausbildung eines solchen Bewusstseins kann die Elementarmathematik eine wichtige Schlüsselstellung und Mittlerrolle zwischen Schul- und Hochschulmathematik einnehmen, weil sie technisch voraussetzungsarme, eben „elementar zugängliche" mathematische Inhalte verhandelt und zugleich authentische Mathematik ist. Elementarmathematische Lehrveranstaltungen sollen Erfahrungen ermöglichen, die mit folgenden Merkmalen im Einklang sind:

- Elementarmathematik ermöglicht den Erwerb typischer mathematischer Denk- und Arbeitsweisen und repräsentiert so die „Erfahrung Mathematik" im Kleinen.
- Elementarmathematik knüpft an grundlegende kognitive Erfahrungen an und ist so dem Denken und Verstehen in besonderer Weise zugänglich.
- Elementarmathematik trägt zur Erweiterung der mathematischen Erfahrungswelt der Lernenden bei und ist anschlussfähig für fachliche Vertiefungen.
- In der Elementarmathematik kann der innermathematische Beziehungsreichtum ihrer Inhalte erfahren werden; dies kann sowohl mit semantischem als auch mit syntaktischem Akzent geschehen.

Als besonders geeignet für eine elementarmathematische Orientierung erscheinen Veranstaltungen zur „Elementaren Algebra und Zahlentheorie" und zur „Elementargeometrie".

Aber auch Lehrangebote zur Kombinatorik, Graphentheorie oder Kryptographie lassen sich vorzüglich elementarmathematisch akzentuieren, da sie technisch voraussetzungsarm zugänglich sind. Darüber hinaus ermöglichen diese Themenfelder Forschungserfahrungen „im Kleinen". Sie vermitteln zudem zwischen reiner Mathematik und Anwendungen und tragen damit zu einem Bild von Mathematik bei, zu dem syntaktische und semantische Aspekte gleichermaßen gehören.

Ein fachmathematischer Kanon.

Die historisch gewachsene Ausdifferenzierung der Mathematik in Subdisziplinen hat sich grundsätzlich bewährt, und die damit einhergehende Einteilung des Lehrstoffes soll – soweit dienlich – aufgenommen werden. Die klassischen Elemente des bisherigen Mathematikgrundstudiums (Analysis, Lineare Algebra und eine Einführung in die Stochastik) sind unverzichtbarer Bestandteil für ein gymnasiales Lehramtsstudium. Diese Veranstaltungen stellen nicht nur das fachwissenschaftliche Basiswissen dar, auf das weiterführende Veranstaltungen aufbauen, sie sind auch die hochschulmathematischen Äquivalente der klassischen Lernbereiche der Oberstufenmathematik. Hinsichtlich der inhaltlichen Gestaltung der Anfängervorlesungen befürwortet die Expertengruppe, an die bisherige Konzeption des Projekts **Mathematik Neu Denken** (2005 – 2008) in Gießen und Siegen anzuknüpfen. Hinzu kommen geeignet konzipierte Basisveranstaltungen zur Algebra und Geometrie, passende Schnittstellenangebote, Veranstaltungen zur Reflexion über Mathematik sowie ausgewiesene Wahlpflichtbereiche.

Analysis/Gewöhnliche Differentialgleichungen

Für die **Analysis** bedeutet eine Integration der Projekterfahrungen insbesondere, dass der Stoff nicht nur deduktiv und fachsystematisch präsentiert werden soll, sondern dass die Vorlesung das Ziel verfolgt, genetisch und prozessorientiert zu arbeiten. Als Konsequenz daraus sollen unter anderem die Schwierigkeiten und das Abstraktionsniveau anfangs eher gering gehalten und erst allmählich gesteigert werden, sodass schwierige Sätze oder Beweise, die die Studienanfänger im Allgemeinen überfordern, auf einen späteren Teil der Vorlesung verschoben werden, auch wenn sie fachsystematisch in einen früheren Abschnitt gehören. Dieser Ansatz ist systematisch auszuweiten: Beispielsweise ist es für alle Studierenden anschaulicher, wenn die mehrdimensionale Analysis nur für den Spezialfall $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ formuliert wird. Dies schränkt die Anschlussfähigkeit für weiterführende Veranstaltungen nur unwesentlich ein und kann sogar als zusätzliche Übungs- und Vertiefungsquelle genutzt werden, indem die Studierenden selbstständig versuchen, Gesetzmäßigkeiten des $\mathbb{R}^3$ auch für den $\mathbb{R}^n$ zu formulieren und zu beweisen, und so den Schritt von der Anschauung zur Abstraktion aktiv konstruieren. Die Inhalte einer üblichen Analysis-II-Vorlesung gehen deutlich über die Themen des Schulunterrichts hinaus, stellen jedoch einerseits das Basiswissen für jegliche weiterführende Vertiefung in analytischen Disziplinen dar und liefern etwa auch die mathematischen Methoden, ohne die eine physikalische Naturbeschreibung nicht möglich wäre. Andererseits erschließt sich die Komplexität der Grundbegriffe der Analysis erst, wenn diese von einer höheren Warte aus betrachtet werden. Dies gilt etwa für die Differenziation als lineare Approximation (ein- bzw. mehrdimensional) und für den Konvergenzbegriff, der seine Flexibilität zum Beispiel erst für Funktionenfolgen (punktweise versus gleichmäßig) zeigt.

Die im Wesentlichen kanonischen Lehrinhalte der Analysis sollen hier nicht angeführt werden, jedoch beispielhaft einige Themenbereiche, die einem historisch-genetischen Ansatz entsprechen:

- Der klassische „Vorspann" mengentheoretischer und formallogischer Sprachregeln (Mengen, Aussagen, Wahrheitstafeln) sollte möglichst nicht „auf Vorrat" eingeführt werden.
- Die Körperaxiome können (parallel und im Vergleich zur Axiomatik) anschaulich geometrisch eingeführt werden; Zahlbereichserweiterungen (von den natürlichen bis zu den komplexen Zahlen) können in historischen Exkursen diskutiert werden.
- Der Ableitungsbegriff wie auch der Funktionsbegriff kann ebenfalls historisch motiviert werden.
- Für die Cantorsche transfinite Mengenlehre können Genese und erkenntnistheoretische Implikationen diskutiert werden.
- Einführende Konzepte der Funktionentheorie könnten integriert werden, um die Besonderheiten der reellen Analysis darstellen zu können.

Als weiteres verpflichtendes Element im Rahmen des fachwissenschaftlichen Basiswissens stellt sich die Expertengruppe eine Veranstaltung **Gewöhnliche Differenzialgleichungen** (im Umfang von circa 2 SWS) vor. Diese sind unverzichtbares Hilfsmittel für jegliche moderne Naturwissenschaft. Ein Einblick in die Theorie der gewöhnlichen Differenzialgleichungen leistet somit einen unschätzbaren Beitrag, um Studierenden die modellierende Kraft der Mathematik aufzuzeigen.

Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Der Trend für „moderne" Vorlesungen in der Linearen Algebra ging in den letzten Jahrzehnten immer mehr weg von der Anschauung hin zur Abstraktion. Die grundlegenden algebraischen Strukturen standen dabei im Vordergrund, Zeit für geometrische Veranschaulichung oder praktische Anwendung blieb de facto kaum. Bewusst gegen diesen Trend wurde im Rahmen des Projekts **Mathematik Neu Denken** am Standort Gießen die Veranstaltung als „Analytische Geometrie und Lineare Algebra" (AGLA) für das Lehramtsstudium konzipiert. Die Vorlesung setzt auf die Kraft der Anschauung und damit auf das Primat der Geometrie. Geometrie kommt in der Veranstaltung durchgängig vor, und zwar nicht als Illustration oder bloße Veranschaulichung, sondern als Grundlage und Motivation. So wird zu Beginn der dreidimensionale Raum behandelt, später detailliert die Frage: Was ist ein Vektor? Hier ist der Bezug zur Schulmathematik besonders wichtig. Vor der Einführung linearer Abbildungen werden geometrische Abbildungen behandelt, und das Studium von Bilinearformen ist darauf ausgerichtet, Kegelschnitte und Quadriken im dreidimensionalen Raum zu verstehen.

Ein weiterer Schwerpunkt war der durchgängige Einsatz von Computer-Algebra-Systemen, mit denen die Studierenden nicht nur den behandelten Stoff visualisieren und durchdringen, sondern auch selbstständig für sie neue theoretische Einsichten gewinnen konnten.

Es hat sich gezeigt, dass bei Beibehaltung einer zweisemestrigen Vorlesung kein „Stoffproblem" auftritt. Die Inhalte waren fast die gleichen wie bei einer traditionellen Vorlesung über Lineare Algebra. Die Expertengruppe kann sich auch vorstellen, den zweiten Teil der Veranstaltung nur mit 4 statt 6 SWS anzubieten. (In Siegen wird die Lineare Algebra für Lehramtskandidaten derzeit einsemestrig mit 6 SWS gelesen.)

Stochastik

Neben der Analysis und Algebra/Linearen Algebra (einschließlich analytischer Geometrie) ist die Stochastik der dritte große Lernbereich „höherer" Mathematik am allgemeinbildenden Gymnasium. Das dabei zentrale mathematische Konzept der Wahrscheinlichkeit ist sowohl aus philosophischer und historischer Sicht hochinteressant als auch unverzichtbar für die verschiedensten Anwendungen, etwa in Naturwissenschaft, Technik und Ökonomie. Ziel der Veranstaltung ist ein aktives Verständnis der Studierenden für die spezifischen Begriffe, Methoden und Denkweisen der Stochastik. Darüber hinaus soll die Stochastik kulturgeschichtlich und in ihrer sozialen und politischen Bedeutung wahrgenommen werden. Für das Stochastik-Grundstudium hat sich ein gewisser Kanon herausgebildet, der im Wesentlichen übernommen werden soll (unter anderem Wahrscheinlichkeit, Zufallsvariablen und deren Verteilungen, Unabhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Korrelation, Schätz- und Testverfahren). Dabei ist ein möglichst oft erlebter Übergang vom Intuitiven zum Präzisen in Form einer Modellierung zufallsabhängiger Vorgänge unerlässlich; insbesondere kommt der Auseinandersetzung mit paradoxen Phänomenen eine wichtige Rolle zu. Um dem Einüben stochastischer Modellbildung ohne Verwendung fortgeschrittener mathematischer Techniken genügend Raum zu lassen, ist eine zu frühe Behandlung stetiger Verteilungsmodelle nicht angebracht. Gerade für Lehramtsstudierende sollten auch Ausblicke auf die historische Genese der dargestellten Konzepte (hierzu gehören insbesondere der Wahrscheinlichkeitsbegriff und die Anfänge der Statistik) integriert werden. Je nach der verfügbaren Zeit sind außerdem Exkurse etwa zu folgenden Themen denkbar:

- Was ist Zufall?
- Pseudozufallszahlen und Simulation
- Paradoxa der Stochastik (erste Kollision, Bertrand, Ziegenparadoxon etc.)
- Irrfahrten
- Statistische Physik (Maxwell-Boltzmann-, Bose-Einstein- und Fermi-Dirac-Statistik)
- Bayes- versus klassische Statistik
- Elementare Spieltheorie
- Entropie und Kodierung
- Elementare Stochastik der Finanzmärkte

Schnittstellenangebot

Die Diskussionen der Expertengruppe zu den Themen „Elementarmathematik" und „Schulmathematik vom höheren Standpunkt" haben deutlich gemacht, dass die Lehramtsstudierenden so ausgebildet werden müssen, dass sie über ein sicheres Verständnis mathematischer Denk- und Arbeitsweisen verfügen, die für den reflektierten Umgang mit der Mathematik in der Schule relevant sind. Die Hochschulmathematik soll zu diesem Verständnis beitragen, kann es aber aufgrund der Andersartigkeit ihres Selbstkonzepts höchstens partiell leisten.

Daher empfiehlt die Expertengruppe Schnittstellenangebote, bei der die klassischen Bereiche schulischer Mathematikerfahrung der Oberstufe (Analysis, Analytische Geometrie/ Lineare Algebra, Stochastik) von einem verstehensorientierten („höheren") Standpunkt reflektiert werden. Der Absolvent von Veranstaltungen zur „Schulmathematik vom höheren Standpunkt"

- verfügt über reichhaltige inhaltliche Vorstellungen zu mathematischen Begriffen,
- kann zwischen einer formalen und einer inhaltlich-interpretierenden Ebene unterscheiden und übersetzen,
- verfügt über präformale Begründungen und Vorgehensweisen und kennt Übergänge vom Intuitiven zum Präzisen.

Die Konzeption eines solchen Schnittstellenangebots gehört zum Kern der hier vorgeschlagenen Neuorientierung.

Zu jedem der drei Lernbereiche der Oberstufenmathematik gehört ein geeignetes Schnittstellenangebot. Von den drei Veranstaltungen

- **Schulanalysis vom höheren Standpunkt,**
- **Schulische Analytische Geometrie/Lineare Algebra vom höheren Standpunkt,**
- **Schulstochastik vom höheren Standpunkt**

sollten zwei zum Pflichtkanon gehören.

Schnittstelleninhalte können natürlich auch in die zugehörigen Basisvorlesungen integriert sein.

Algebra/Geometrie

Weitere Grundlegungen der Basismathematik für das Lehramtsstudium erfolgen in zwei verpflichtenden, elementarmathematisch orientierten Veranstaltungen zur „Elementaren Algebra und Zahlentheorie" und zur „Elementargeometrie". Diese Veranstaltungen knüpfen explizit an die Schulmathematik an.

Die klassische Algebra ist zweifellos eine Königsdisziplin der Mathematik. Es ist aber auch klar, dass man für die Strukturalgebra, insbesondere für die Galoistheorie, einen sehr hohen Aufwand treiben muss, um zum Kern der Theorie vorzudringen. Diese Veranstaltung berührt nur einen kleinen Teil der Schulalgebra (nämlich die Erkenntnis, dass es nichtauflösbare Gleichungen gibt und wie man diese erkennen kann), weswegen viele wichtige Aspekte der Schulalgebra (elementare Zahlentheorie, Zahlbereiche, Gleichungen, Anwendungen der Algebra in der Codierung und Kryptographie) notwendigerweise unberücksichtigt bleiben. Daher sollte eine klassische Algebra nicht im Pflichtbereich eines Lehramtsstudiums vorgesehen sein.

An ihre Stelle tritt eine **Elementare Algebra und Zahlentheorie.** Mögliche Themengebiete dafür sind: Zahlen und Positionssystem, Zahlbereichserweiterungen, Gleichungen, Funktionen, Algorithmen, aber auch Körpererweiterungen (algebraisch, transzendent), Konstruktionen mit Zirkel und Lineal; elementare Zahlentheorie (Teilbarkeitslehre, Kongruenzrechnung etc.), Anwendungen.

Eine **Geometrievorlesung** für Lehramtsstudierende muss ebenfalls eigenen Ansprüchen genügen, insbesondere muss sie elementargeometrisch orientiert sein und an die gymnasiale Mittelstufengeometrie anknüpfen. Geometrie, speziell euklidische Geometrie, ist durch ihre Axiomatik gekennzeichnet. Die Axiomatik Euklids steht am Anfang der Entwicklung der für die Mathematik charakteristischen deduktiven Methode. Dies gilt es zu thematisieren, zum Beispiel im Vergleich zur Axiomatik der Nicht-Euklidischen Geometrie (Anfänge der Projektiven Geometrie) oder im Kontext der Diskussion um die Axiomatik der Geometrie (zum Beispiel von Hilbert). Eine Geometrievorlesung kann neben der Behandlung euklidischer Geometrie etwa über die Einbeziehung der Geschichte der Mathematik (Arabische Mathematik, Descartes, Alberti, Stevin, Lambert, Gauß, Lobatschewski und andere) zu Themenfeldern wie Koordinatisierung, Perspektive oder Nicht-Euklidische Geometrie führen. Aspekte der Stereometrie sollten ebenfalls diskutiert werden. Der Begriff der Symmetrie könnte eine geistesgeschichtliche Schlüsselrolle spielen. Als nützlich erweist sich für die Geometrie die sinnvolle Einbeziehung von geeigneter Geometriesoftware.

Reflexion über Mathematik: Geschichte und Philosophie

Die Expertengruppe ist der Überzeugung, dass die Lehramtsstudierenden die Möglichkeit erhalten sollen, einen übergeordneten Standpunkt zur Wissenschaft Mathematik entwickeln zu können. Unterschiedliche Lehrangebote können zur Reflexion über Mathematik anregen, wobei hier insbesondere auf die tragende Rolle der Geschichte und der Philosophie der Mathematik hingewiesen wird. Mindestens eine der folgenden Veranstaltungen sollte angeboten und besucht werden.

Geschichte der Mathematik: Zu einer prozessorientierten Auffassung der Mathematik als wissenschaftliche Disziplin kann die historisch-genetische Sicht in besonderem Maße beitragen. Der Blick in die Geschichte lehrt, wie mühsam es auch erkenntnistheoretisch war, die Konzepte des modernen mathematischen Fachkanons befriedigend herauszuarbeiten. Die Geschichte mathematischer Probleme oder die Geschichte epochaler mathematischer Entwicklungen kann neben einer genetisch orientierten fachwissenschaftlichen Betrachtung dazu beitragen, neue Motivationen zu entwickeln und den Blick für die Kraft elementarer Methoden zu schärfen.

Philosophie der Mathematik: Ziel ist die explizite Thematisierung einer Metaperspektive auf die Mathematik. Als Kontrast zum Erlernen des mathematischen Handwerks soll hier „von außen“ gefragt werden, was Mathematik eigentlich ausmacht und wie sie sich in übergreifende (etwa erkenntnistheoretische, naturphilosophische, ethische) philosophische Diskurse einfügt. Hierzu können klassische philosophische Positionen thematisiert werden (Pythagoräer, Platon, Aristoteles, Cusanus, Leibniz, Kant, Hume, Mill), aber auch die Grundlagendebatte des 20. Jahrhunderts (Frege, Russell, Brouwer, Hilbert, Weyl) sowie aktuelle Diskussionen. Ebenso sind themenbezogene Querschnitte möglich, etwa zu Unendlichkeit, Beweis, wissenschaftlichem Determinismus, Mathematik und Sprache, Mathematik und Technik.

Logik: Hier kann zum einen die Entwicklung der Logik (Aristoteles, mittelalterliche Syllogistik, Boole, ...) behandelt werden, zum anderen „moderne" Prädikaten- und Quantorenlogik, Axiomatik, bis zur Grundlagenproblematik und den Ergebnissen von Gödel und anderen.

„Tiefe" im Mathematikstudium: Wahlpflichtbereiche

Viele der Überlegungen der Expertengruppe waren von dem Gedanken getragen, dass die Studierenden in einem Mathematikstudium die Erfahrung von Breite und Tiefe machen sollen. Die Erfahrung von Breite umfasst nicht nur die unterschiedlichen Teildisziplinen der Mathematik und ihre Vernetztheit, sondern auch die Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik in Natur und Technik, Wirtschaft und Gesellschaft, Kunst und Musik. Die Erfahrung von „Tiefe" in einem Mathematikstudium hat ebenfalls unterschiedliche Facetten. Tiefe kann einerseits die Tiefe der Reflexion über ein mathematisches Thema bedeuten, die Erfahrung des vertieften Verstehens von Begriffen, aber auch von Verfahren. Zum anderen kann die Erfahrung von Tiefe aber auch das vertiefte Eintauchen in eine mathematische Theorie beschreiben, bei dem tief gehende Resultate mit elaborierten Werkzeugen erarbeitet werden. Verbunden mit dieser Vorstellung von „Tiefe" ist die Auffassung, dass die Studierenden an einer kleinen Stelle der Mathematik die Erfahrung machen sollen, „alles" über dieses Thema zu wissen. Eine weitere Deutung von Tiefe hängt schließlich mit der Erfahrung von Breite zusammen: Ist man in einen Aspekt von Mathematik tatsächlich vertieft, wird man die Bedeutung des Aspekts nicht mehr singulär wahrnehmen, sondern in Verknüpfung zu anderen Teilgebieten der Mathematik.

Unter den weiterführenden fachmathematischen Veranstaltungen sollte daher mindestens ein Hauptseminar sein.

Folgende **Themenbereiche** für weiterführende Angebote seien exemplarisch genannt: Mehrdimensionale Integration, Maß und Integral, Funktionentheorie, Funktionalanalysis, (Partielle) Differenzialgleichungen, Mathematische Physik, Numerische Mathematik, Differenzialgeometrie, Projektive Geometrie, Galoistheorie, Zahlentheorie, Topologie, Diskrete Mathematik, Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik.

2. Die fachdidaktische Komponente.

Mathematik als Wissenschaft ist zugleich ein sich entwickelnder Wissensbestand und ein diese Entwicklung tragender Prozess. Mit ihrer spezifischen Art, Phänomene der physikalischen, der sozialen und der mentalen Welt gedanklich zu organisieren (Freudenthal 1983), ist sie Kulturgut und Schlüsseltechnologie zugleich.

Lehrerinnen und Lehrer sollten Mathematik so verstanden haben, dass sie den Zusammenhang zwischen Wissensbestand und Erkenntnisprozess bedenken und explizit machen können und wissen, welche Rolle die Mathematik in unserer Welt spielt und auf welche Weise sie dies tut.

Lehrkräfte sollten insbesondere über ein breites Spektrum bedeutungsvoller und anregender mathematischer Inhalte verfügen und dazu wissen, wie das gedankliche Organisieren von Phänomenen mit mathematischen Mitteln geschieht. Dies ist deshalb nötig, weil sie in ihrer Berufspraxis ihrerseits in der Lage sein sollten, mathematische Denkprozesse anzustoßen, zu moderieren, zu begleiten und zu beurteilen. Dies alles erfordert eine inhaltliche, wissenschaftstheoretische und erkenntnistheoretische Durchdringung des Faches sowie Kenntnisse und Einfallsreichtum für das Initiieren und Begleiten von mathematischen Lernprozessen und Sensibilität für das aufkeimende mathematische Denken von Lernenden.

Auf diese Anforderungen vorzubereiten, gehört zum Kernbereich der Didaktik der Mathematik. Die Mathematikdidaktik erforscht Prozesse des Lernens und Lehrens von Mathematik und entwickelt Unterrichtskonzepte, die diese Erkenntnisse effizient nutzen. Sie muss diese Forschungs- und Entwicklungsansätze in der universitären Lehre erfahrbar machen und ist damit die Wissenschaft, die Professionalität im oben beschriebenen Sinne aufbaut. Damit kann sie

> „fachinhaltliches Wissen, pädagogisch-psychologisches Kontextwissen und schulpraktisches Handlungswissen integrieren und so eine Brücke zwischen diesen Komponenten sein. Auf diese Weise kann [sie] wesentlich dazu beitragen, in den Köpfen der Studierenden eine einheitliche Sichtweise von den Anforderungen des zukünftigen Berufs und des darauf ausgerichteten Studiums zu erzeugen."
>
> Terhart 2000, S. 104

Lehre in der Fachdidaktik.

Folgende Schwerpunkte können als wesentlich erachtet werden, um den oben skizzierten Auftrag der Fachdidaktik in der universitären Lehre einzulösen:

Bildungstheoretische Reflexion

Die bildungstheoretische Sichtweise auf das Fach reflektiert, dass und wie die Mathematik auf spezifische Weise zum Weltverstehen und damit zu unserer Kultur beiträgt. Sie diskutiert den **Bildungswert** des Schulfachs Mathematik und den **Bildungsauftrag** des Mathematikunterrichts. Dazu gehört, Konzepte „mathematischer Bildung" vorzustellen und zu bewerten. Sie befähigt, Unterrichtsziele und -inhalte begründet auszuwählen und zu akzentuieren und mit vorgegebenen Lehrplänen, Materialien und Medien kritisch-konstruktiv umzugehen. Sie sensibilisiert auch gegenüber reduktionistischen Auffassungen von Mathematik und Mathematiklernen.

Mathematikbezogene Denkhandlungen

Denken abstrahiert, verallgemeinert, ordnet, bildet Begriffe und Modelle, zieht Schlüsse und löst Probleme. Diese Denkhandlungen prägt die Mathematik auf spezifische Weise aus. Die Auseinandersetzung mit zentralen mathematischen Denkhandlungen wie **Ordnen** und **Strukturieren**, **Begriffsbilden**, **Argumentieren** und **Beweisen** sowie **Problemlösen** und **Modellieren** ermöglicht ein vertieftes Verständnis der Mittel und Wege der Gewinnung mathematischer Erkenntnisse im Spannungsfeld von Beschreiben und Gestalten. Der alle diese Denkhandlungen durchdringende Wesenszug der Mathematik ist der Prozess der fortschreitenden Formalisierung.

Wege, Mathematik zugänglich zu machen

Die Mathematik ist ein kulturelles Hochprodukt. Ihre wirksame Vermittlung bedarf besonderer Expertise. Diese muss der Spanne zwischen phänomenologischer und abstrakter Erfassung, zwischen intuitiver und formalisierter Darstellung, zwischen alltagssprachlicher und fachsprachlicher Ausdrucksweise Rechnung tragen. Dazu ist die Kenntnis verschiedener **Zugangsweisen**, vermittelnder **Vorstellungen** und **paradigmatischer Beispiele** sowie die Fähigkeit zum flexiblen Wechsel zwischen **Stufen begrifflicher Exaktheit** erforderlich. Vertrautheit mit **Konzepten und Modellen schulischen Mathematiklernens und -lehrens** ist notwendig, um längerfristig angelegte Lernprozesse zu gestalten. Dabei gilt es, eine Balance zwischen angeleiteter Erarbeitung und eigentätiger Entfaltung zu finden und das

Lernen so auszurichten, dass es zielgerichtet und wirksam ist. Zum Zugänglichmachen von Mathematik gehört auch ein **sinnvoller Rechnereinsatz**.

Diagnose und Förderung

Die strenge Organisierbarkeit (fertigen) mathematischen Wissens darf nicht zu der Fehleinschätzung verleiten, der Prozess des mathematischen Wissens- und Kompetenzerwerbs sei durch eine entsprechend streng organisierte Stoffvermittlung planbar und gestaltbar. Die Lernwege junger Menschen sind unkonventionell und vielfältig und brauchen ihre je eigene Würdigung sowie Spielräume und Anstöße zur Reifung. Deshalb müssen zwei Bereiche vermehrt Beachtung im Mathematik-Lehramtsstudium finden, nämlich das mathematische Denken von Kindern und Jugendlichen sowie das differenzierte und individualisierte Diagnostizieren und Fördern.

Hinsichtlich des mathematischen Denkens ist es wichtig, durch geeignete kognitionspsychologische Analysen Vorstellungen und Fehlvorstellungen von Lernenden sowie Denkstrategien und Denkstile aufzudecken. Dies ist Voraussetzung, um im Unterricht zu erkennen, welche gedankliche Substanz in dem steckt, was Lernende sagen und schreiben. Für diese individuellen Artikulationen gilt es dann, Würdigung, Anerkennung und Hilfestellung zu finden und die Lernfortschritte zu bewerten.

Zusätzlich zu diesen vorrangig qualitativ arbeitenden Verfahren der individuellen Diagnose und Förderung benötigen angehende Lehrkräfte Methodenkenntnisse über quantitative Leistungsstudien und darauf basierende Fähigkeiten, deren Ergebnisse zu interpretieren und zugehörige Kompetenzmodelle zu beurteilen.

Potenzial von Aufgaben

Eine Schlüsselfunktion haben Aufgaben. Die Fähigkeit, Aufgaben für verschiedene Stadien des Lernprozesses zu gestalten und einzusetzen – zur Initiierung, zur Festigung, zur Reflexion und zur Überprüfung der erworbenen Kompetenzen – sowie Aufgabenbearbeitungen zu analysieren und diagnostisch zu interpretieren, ist ein essenzieller Bestandteil des professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern.

Diese verschiedenen Fähigkeiten bilden eine zentrale Kompetenz, die Lehrerinnen und Lehrer in der Ausbildung erwerben und in der Berufspraxis weiter ausbauen müssen. In ihr werden verschiedene Bereiche der fachdidaktischen Ausbildung verzahnt und verschiedene Ebenen des fachdidaktischen Denkens und Handelns zur Synthese gebracht.

Hier ist das konstruktive Zusammenwirken von fachlichem Sachverstand, lernpsychologischer Sensibilität und didaktisch-methodischem Einfallsreichtum gefordert. Zugleich vereinen sich das an Theorie, Wissenschaft und Forschung orientierte Reflexionsvermögen und das auf Praxis, Berufsfähigkeit und Berufstüchtigkeit ausgerichtete Handlungsvermögen.

Schulpraktische Studien

Schulpraktische Studien spielen in allen Lehramtsstudienordnungen eine zentrale Rolle. Unterrichtspraktika bieten den Studierenden die Möglichkeit, fachbezogene Lehr- und Lernpozesse auf der Basis theoretischer Überlegungen zu erfahren, dies von den eigenen unreflektierten schulischen Vorerfahrungen abzugrenzen und bei der Beurteilung des Unterrichtsgeschehens eine Metaebene zu erreichen.

Eine Grundbedingung für die Durchführung von Unterrichtspraktika ist die Vor- und Nachbereitung der Praxiserfahrungen durch Begleitseminare an der Universität. Entscheidend für den Erfolg eines Praktikums ist nicht die Qualität der selbstständigen Unterrichtsversuche, sondern die individuelle theoriegeleitete Reflexion des Geschehens. Das Praktikum muss sich auf theoretisch-analytische Grundpositionen und -fertigkeiten stützen können, die in einem Vorbereitungsseminar erarbeitet werden, zum Beispiel durch Fallstudien und Feldstudien, didaktische Analysen zum Unterrichtsthema und zugehörigen Lernmaterialien, Analysen zu Fehlern und Fehlvorstellungen, zur Unterrichtsinteraktion und zur Wirkung von Aufgaben, Zusammenführung der erworbenen Erkenntnisse in der Konzeption von Unterrichtsentwürfen und anderem. So werden die Studierenden potenziell mit mathematikunterrichtsbezogenen Handlungskompetenzen ausgerüstet und können einen eigenen begründeten Standpunkt entwickeln.

Die rückblickende Aufarbeitung der Praxisbegegnung am Ende eines Praktikums darf sich nicht auf einen bloßen Erfahrungsbericht beschränken; sie muss eine theoretisch fundierte wissenschaftliche Auseinandersetzung mit den eigenen Erfahrungen beinhalten, die von der Universität begleitet wird.

Die gemeinsame Verantwortung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik.

Lernen bedeutet Wissen zu entwickeln; Lehre muss hierzu anleiten. Diese Lernperspektive korrespondiert mit der Vorstellung einer sich lebendig entwickelnden Mathematik. Deshalb sollten angehende Lehrerinnen und Lehrer das Fach Mathematik nicht nur als einen fertigen, sondern als einen sich entwickelnden Wissensbestand kennengelernt haben und sich dessen bewusst geworden sein, welche Prozesse diese Entwicklung tragen. Hierzu gehören die zentralen mathematischen Denkhandlungen wie **Ordnen** und **Strukturieren**, **Begriffsbilden**, **Argumentieren** und **Beweisen** sowie **Problemlösen** und **Modellieren**. Diese treten in Hochschulmathematik und Schulmathematik gleichermaßen, wenn auch in unterschiedlicher Ausprägung, auf.

Um auf die Bewältigung ihrer Aufgaben vorbereitet zu sein, müssen die angehenden Lehrkräfte im Rahmen ihres Fachstudiums mit diesen Denkhandlungen vertraut gemacht werden. Dies erlegt der Fachwissenschaft eine besondere Verantwortung auf, zu deren Einlösung sie auch auf elementarmathematische Inhalte zurückgreifen sollte.

Geeignet verarbeitetes fachmathematisches Wissen sichert dann die Anschlussfähigkeit für die Fachdidaktik.

> „Offensichtlich sind Lehrkräfte nur dann in der Lage, Lernprozesse zu steuern, wenn sie sich selbst sicher in der Domäne ihres Unterrichtsfaches bewegen können. Fachwissen wird gemeinhin als notwendige, aber nicht hinreichende Voraussetzung für fachdidaktisches Wissen gesehen: ‚Fachwissen ist die Grundlage, auf der fachdidaktische Beweglichkeit entstehen kann' (Baumert & Kunter)."
>
> Krauss; Neubrand et al. 2008, S. 228

In gemeinsamer Verantwortung mit der Fachwissenschaft akzentuiert die Fachdidaktik folgende **charakteristische Merkmale**, die den beweglichen Umgang mit der Mathematik in der Schule ausmachen:

Die fachlich und fachdidaktisch bewegliche Lehrkraft weiß um die Reichhaltigkeit an inner- und außermathematischen Bezügen und kann sie verfügbar machen. Dies schließt einen Habitus ein, mit typischen fachspezifischen Vorgehensweisen vertraut zu sein und darüber hinaus eine Wertschätzung für Einfallsreichtum, Eleganz und Leistungsfähigkeit mathematischer Ideen und Methoden zu haben. Im Einzelnen

- verfügt die Lehrkraft über ein reiches Angebot an inhaltlichen Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen, und sie kann einen mathematischen Gegenstand unter vielfältigen Perspektiven betrachten und durch Eigenschaften charakterisieren,
- weiß die Lehrkraft, welche Phänomene jeweils mathematisch beschrieben werden, und sie kann zwischen einer formalen und einer inhaltlichen Ebene übersetzen,
- ist sie urteilsfähig im Umgang mit Mathematisierungen der Realität,
- kann sie durch Vernetzung von Teildisziplinen den innermathematischen Beziehungsreichtum eines Themas entfalten,
- pflegt und reflektiert sie den flexiblen Einsatz und Wechsel von Darstellungsformen,
- verfügt sie über präformale Begründungen und Vorgehensweisen und kennt Übergänge vom Intuitiven zum Präzisen.

Und schließlich kann die fachlich und fachdidaktisch bewegliche Lehrkraft zwischen realitätsbezogener und innermathematischer Modellierung unterscheiden, bei Letzterer verbunden mit einem Gespür für sinnvolle theoretische Konstrukte. Sie kann die Leistungsfähigkeit und Grenzen von Kalkülen würdigen und Probleme gegebenenfalls mit einem elementar-inhaltlichen Argument lösen.

Insgesamt verfügt die Lehrkraft über ein sicheres Verständnis von mathematischen Denk- und Arbeitsweisen, die für den Umgang mit der Mathematik in der Schule relevant sind.

Der Wissenschaftsbezug der fachdidaktischen Ausbildung.

Eine wissenschaftliche Betrachtung der Welt richtet sich darauf, einen bestimmten Phänomen- oder Problembereich über das verfügbare Alltagswissen hinausgehend zu verstehen und zu erklären. Gegenüber dem ungesicherten und häufig subjektiven Meinen steht das wissenschaftliche Wissen unter Begründungsanspruch, das heißt seine Aussagen müssen sich einer kompetent und rational geführten Argumentation stellen. Wissenschaftliches Wissen muss sich dazu seiner Grundlagen und seines inneren Aufbaus theoretisch bewusst sein.

Zur Generierung wissenschaftlichen Wissens gehört somit die begleitende Theoriebildung, die es ermöglicht, den betrachteten Bereich begrifflich zu ordnen und die wesentlichen Eigenschaften der zugehörigen Gegenstände und deren Beziehungen untereinander zu beschreiben, allgemeine Gesetze für sie herzuleiten und Prognosen über das Auftreten bestimmter Phänomene innerhalb des Bereiches anzustellen.

So, wie die Medizin sich von einer mehr oder weniger intuitiv vorgehenden Heilkunst zu einer umfassenden medizinischen Wissenschaft entwickelt hat und wie aus technischer Kunstfertigkeit eine wissenschaftsbasierte Hochtechnologie geworden ist, sollte auch tradierte Lehrkunst sich zunehmend zu einem wissenschaftsorientierten Unterrichtshandeln entwickeln.

Generell und über alle Aufgabenfelder hinweg muss daher die fachdidaktische Ausbildung **wissenschaftlich orientiert** sein. In der gemeinsamen Denkschrift der Fachverbände heißt es hierzu:

> „Es darf keinesfalls nur um die Vermittlung von bloßem Erfahrungswissen oder von Rezepten für ‚erfolgreiches' Lehren gehen. Vielmehr ist nur durch eine forschungsorientierte Lehre gewährleistet, dass Studentinnen und Studenten ein theoretisch fundiertes Wissen erwerben, auf das sie in lebenslanger Fort- und Weiterbildung aufbauen können." Stroth et al. 2001, S. 4

Diese Sicht wird auch von erziehungswissenschaftlicher Seite gestützt:

> „Wie alle akademischen Lehrveranstaltungen müssen auch fachdidaktische Studien auf einschlägige Forschungs- und Entwicklungsarbeiten gründen. Dies setzt eine forschungsorientierte Fachdidaktik voraus. Nur durch eine enge Verbindung von fachdidaktischer Forschung und Lehre sind die notwendigen Ansprüche an Lehrveranstaltungen in der ersten Phase einzulösen." Terhart 2000, S. 103

Eine wissenschaftlich orientierte fachdidaktische Ausbildung sollte angehenden Lehrkräften Grundlagenwissen für ihre künftige Berufstätigkeit vermitteln und eine Haltung erzeugen, die scharfsinniges Beobachten, prägnantes Beschreiben, stringentes Deuten, einfallsreiches Gestalten und kritisches Prüfen zur begleitenden Maxime ihrer praktischen Tätigkeit werden lässt und sie befähigt, allein und im Team

- beständig an der Verbesserung ihres Unterrichts zu arbeiten,
- aktuelle Entwicklungen der Unterrichtswissenschaft aufnahmebereit zu verfolgen,

- Neuerungen wie den Einsatz von Rechnern im Unterricht – seien diese bildungspolitisch verfügt oder eigendynamisch erfolgt – mit kritischer Aufgeschlossenheit und Reflexionsvermögen zu erproben.

Je genauer und je gründlicher die forschende Betrachtung ist, desto mehr Nutzen wird für die weitere Unterrichtsgestaltung zu erwarten sein.

Dabei ist zu bedenken, dass die Mathematikdidaktik eine andere Methodologie benötigt als die Mathematik selbst. Die Mathematik mit ihrer unausweichlichen Strenge, bedingt durch die Präzision ihrer Begriffsbildungen und Argumentationsweisen und die logische Geschlossenheit ihrer Systeme, nimmt im Kanon der Wissenschaften eine Sonderrolle ein, die wesentlich durch die rein geistige Natur ihrer Objekte bedingt ist. Wissenschaft vom Mathematikunterricht aber erforscht Prozesse mathematischer Wissensbildung und entwickelt, erprobt und evaluiert hierauf abgestimmte Unterrichtsideen. Dabei hat sie es mit der Komplexität und dem evolutionären Charakter alles Lebendigen zu tun (Hefendehl-Hebeker 2003). Insgesamt bedeutet dies, dass Lehramtsstudierende in der Mathematikdidaktik mit anderen Forschungsparadigmen vertraut gemacht werden müssen als in der Fachwissenschaft Mathematik.

Gestaltung von Seminaren.

Zum Aufbau von mathematikdidaktischer Kompetenz leisten neben Vorlesungen, Übungen und Praktika insbesondere Seminare einen wesentlichen Beitrag. Die Gestaltung eines Seminars mit dem Anspruch einer nachhaltigen Wirkung ist für die Teilnehmer mit Literaturstudien, Forschungs- und Analyseaufgaben, Referatsvorbereitungen, Ausarbeitungen und Leistungskontrollen verbunden. Die Beschäftigung mit Büchern und Zeitschriftenaufsätzen zur Mathematikdidaktik und zum Mathematikunterricht ist unerlässlich. Konzepte und Sichtweisen, Wandel und Entwicklung der Bezugswissenschaften sowie Stand der Forschung sind vor allem über die Lektüre zu erschließen.

Lehramtsstudierende müssen die Fähigkeit, mit Forschung umzugehen, einüben. Somit sind auch kleinere Forschungsaufgaben und Untersuchungsprojekte anzubieten. Die Studierenden machen sich mittels thematisch gebundener Forschungsaufgaben vertraut mit Schul- und Unterrichtswirklichkeit. So erkunden sie etwa Vorgehensweisen und Positionen von Mathematiklehrkräften sowie Wissens- und Denkleistungen von Schülerinnen und Schülern – in vergleichender Weise und im Bezug zu eigenen Lernerfahrungen. Die erhobenen Ergebnisse sind von einer distanzierten und reflektierten Warte aus theoretisch einzuordnen. Die Einordnung bezieht sich indes nicht nur auf die aus der Praxis gewonnenen Ergebnisse, sondern auch auf publizierte Forschungs- und Entwicklungsresultate.

Für die Seminarvorbereitung und -gestaltung ist zu bedenken, dass ein ausschließliches Referieren in den Veranstaltungen nicht ausreicht, sondern die Teilnehmerinnen und Teilnehmer vielmehr in lernender Weise einbezogen werden müssen. Neben Aktivierung und Diskurs ist ein passender Medieneinsatz vorzusehen.

Berufs- und Praxistauglichkeit lassen sich auch am Grad der Bewältigung der hier genannten Anforderungen prüfen. Seminarveranstaltungen bieten Gelegenheiten, sich selbst zu fragen, ob die fachanalytische und fachdidaktische Kompetenz ausreicht und die personale Kompetenz tragfähig genug ist, berufliche Situationen zu meistern. Die ehrliche Erkenntnis, ob man Ansprüchen des Analysierens von Unterrichtsszenen und Schülerleistungen, des Argumentierens gegenüber anderen – selbst ohne Situations- und Zeitdruck – gewachsen ist, ist allemal ein Stück Praxiserfahrung.

Zur universitären Lehr-Lern-Praxis gehören – über Seminare hinaus – auch Fördermaßnahmen mit Stipendien für eine frühe Beteiligung an mathematikdidaktischer Forschung, eine Weiterentwicklung bisheriger Tutorensysteme mit ausgewiesenen studienmethodischen Hilfestellungen sowie Patenschaften zwischen älteren und jüngeren Studierenden.

Kanon fachdidaktischer Lehrveranstaltungen.

Die verschiedenen Schwerpunkte der Fachdidaktik können im Studium nur exemplarisch bearbeitet werden. Ein Kanon fachdidaktischer Lehrveranstaltungen sollte aber Lehrangebote aus allen Schwerpunkten enthalten. Im Folgenden werden für jedes Aufgabenfeld mögliche Veranstaltungstitel benannt:

Schwerpunkt: Bildungstheoretische Reflexion
- Grundfragen des Mathematikunterrichts/der Mathematikdidaktik
- Didaktik des Mathematikunterrichts in den Sekundarstufen
- Mathematik und Alltagsdenken

Schwerpunkt: Mathematikbezogene Denkhandlungen
- Beweisen im Mathematikunterricht
- Problemlösen und Heuristik
- Modellieren im Mathematikunterricht

Schwerpunkt: Wege, Mathematik zugänglich zu machen
- Didaktik der Algebra
- Didaktik der Funktionenlehre
- Didaktik der Geometrie
- Figuren und Abbildungen im Mathematikunterricht
- Aufbau des Zahlensystems im Mathematikunterricht
- Didaktik der Analysis
- Didaktik der Linearen Algebra/Analytischen Geometrie
- Didaktik der Stochastik
- Computereinsatz im Mathematikunterricht

Schwerpunkt: Diagnose und Förderung
- Qualität von Mathematikunterricht
- Fördern im Mathematikunterricht
- Lernprozessdiagnostik

Schwerpunkt: Potenzial von Aufgaben
- Aufgaben im Mathematikunterricht
- Aufgaben zur Diagnostik im Mathematikunterricht
- Aufgaben in Leistungsstudien

Schwerpunkt: Schulpraktische Studien
- Praxiserfahrungen mit Begleitseminar

Schwerpunktübergreifende Veranstaltungen
- Planung, Durchführung und Analyse von Mathematikunterricht
- Bildungsstandards
- Analysieren von Unterrichtssequenzen
- Forschungsmethoden der Mathematikdidaktik
- Mathematik als Kulturgut
- Konversation zur Didaktik

3. Lehr- und Lernformen.

Lehren und Lernen in Veranstaltungen.

> „Stoff allein genügt nicht. Es muss der dem Fach eigentümliche Denkprozess erlebt und praktiziert werden. Ja, er selbst soll zum Gegenstand des Nachdenkens werden.“ Vgl. Wagenschein 1970, S. 126

Das Nachdenken über die Vermittlung mathematischer Inhalte im Hochschulstudium war Teil des Auftrags der Expertengruppe. Das Credo lautet: Eine Lehrerbildung, die den Anspruch der Professionalisierung in der Ausbildung ernst nimmt, muss auch eine neue methodische Orientierung universitärer Lehrveranstaltungen in den Blick nehmen. Zu Recht wird erwartet, dass angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer ihren Unterricht nicht allein durch das traditionelle fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch gestalten, sondern dass sie über ein angemessenes Methodenrepertoire verfügen, um sowohl dem Unterrichtsthema als auch der heterogenen Schülerschaft gerecht zu werden. Guter Mathematikunterricht erfordert Lehrerinnen und Lehrer, die reflektiert, sicher und situationsgerecht mit vielfältigen Methoden im Mathematikunterricht umgehen können.

Der zentrale Ort, die Methodenvielfalt im Studium fachbezogen zu erleben, ist der fachwissenschaftliche Teil des Mathematikstudiums.

Die traditionellen Lehrformen der Universität sind Vorlesungen und Seminare. Beide Unterrichtsformen sind klassisch primär instruktiv angelegt, wenn auch Seminare häufiger konstruktive oder diskursive Elemente enthalten. Eine neu orientierte Lehrerausbildung muss die vorherrschende Methode der Instruktion um aktivierende, konstruktive Elemente ergänzen, da nicht allein die Disziplin Mathematik, sondern auch die Beziehung Mensch – Mathematik im Mittelpunkt des Interesses stehen soll. Was für die Methodik des Mathematikunterrichts längst postuliert wird, gilt gleichermaßen für eine Methodik der universitären Ausbildung im Fach Mathematik:

> „[...] die Unterrichtsmethoden [müssen] danach beurteilt werden, inwieweit sie der Eigenaktivität der Schüler genügend Raum geben. Hierzu gehört als konzeptionell wirksame Maßnahme die Schaffung produktiver Lernumgebungen, eine Balance zwischen Instruktion und Konstruktion sowie die Öffnung von Aufgaben.“ Borneleit; Danckwerts et al. 2001, S. 83

Die Expertengruppe ist überzeugt, dass Thesen der konstruktivistischen Didaktik auch der Hochschuldidaktik der Mathematik wichtige Impulse geben können. Erfolgreiches Lernen erfolgt weder in der Schule noch an der Universität nach dem Modell des Nürnberger Trichters. Der Wissenserwerb verläuft individuell und kann nicht determiniert, sondern höchstens angeleitet werden. Die Expertengruppe ist gleichwohl der Ansicht, dass ein erfolgreiches mathematisches Fachstudium ohne die Instruktion der klassischen Vorlesung kaum vorstellbar ist. Sie unterstützt jedoch die konstruktivistische Sichtweise, dass die Instruktion in Vorlesungen nur dann erfolgreich sein kann, wenn die Studierenden während und nach den Vorlesungen immer wieder zur eigenen, aktiven Wissenskonstruktion angeregt werden. An dieser Stelle hat das Projekt **Mathematik Neu Denken** (2005 – 2008) angesetzt und im Rahmen der Grundstudiumsveranstaltungen zur Analysis und zur Linearen Algebra den Grundsatz der Balance von Instruktion und Konstruktion in den Mittelpunkt der methodischen Neuorientierung gestellt.

Über Mathematik sprechen lernen – Projekterfahrungen.

> „Die wissenschaftliche Gemeinschaft der Mathematiker ist stolz auf ihren offenen und freien Gedankenaustausch. So haben sich die Teepausen der Mathematiker in Cambridge zu alltäglichen Ritualen entwickelt, bei denen über Earl-Grey-Tee und Gebäck neue Ideen erläutert und geprüft werden."
>
> Singh 2004, S. 28

Die Rituale, die Simon Singh hier schildert, könnten sich so oder ähnlich auch in jedem anderen mathematischen Institut abspielen. Entgegen der landläufigen Ansicht der Öffentlichkeit schließen sich Mathematiker nicht in abgelegenen Studierstuben ein. Singh berichtet weiter über Cambridges offene Bürotüren oder die Ausstattung des Aufzugs und der Waschräume mit Tafeln. Dies mutet schon außergewöhnlich an, aber es charakterisiert gut, was Mathematik treiben bedeutet: Über Mathematik gemeinsam sprechen! Sprechen über Mathematik ist im Übrigen ein Vehikel für das Verstehen von Mathematik.

Schülerinnen und Schüler haben in ihrem Mathematikunterricht in der Regel selten gelernt, über Mathematik zu diskutieren, und sehen häufig auch keinen Bezug von Mathematik und Sprache. Spätestens seit Keith Devlins Buch „Das Mathe-Gen" weiß aber auch eine breitere Öffentlichkeit, dass sich bei den Menschen die Fähigkeit zur Mathematik zusammen mit der Fähigkeit zur Sprache entwickelt hat. Überspitzt könnte man formulieren: Ohne Sprache keine Mathematik. Jedoch liegen Alltagssprache und mathematische Fachsprache weit auseinander. Deshalb müssen die Studierenden von Anfang an dazu angeleitet werden, die „Fremdsprache" Mathematik als solche zu erlernen, aktiv zu gebrauchen und zwischen Alltagssprache und Mathematik zu übersetzen.

Die traditionelle Studiensituation bietet kaum Gelegenheiten, in denen Studierende „über Mathematik gemeinsam sprechen". Instruktion in Vorlesungen und eine Kopie dieser Instruktion in den Übungsstunden, in denen oft eine Musterlösung der Übungsaufgaben an der Tafel präsentiert wird, lassen wenig Raum für Kommunikation über das Thema.

Das Projekt **Mathematik Neu Denken** hat unterschiedliche Methoden erprobt, um die intendierte Balance von Instruktion und Konstruktion in den Veranstaltungen herzustellen und das erklärte Arbeitsziel in den Übungsstunden, über Mathematik sprechen zu lernen, zu verwirklichen. Die Vorlesungen integrierten zwar auch Gesprächsanteile, aber es ist die natürliche Anlage einer Vorlesung, dass sie die Mathematik als Produkt und eben nicht als Prozess präsentiert. Daher war es insbesondere die Arbeit in den Übungsgruppen, in der die Studierenden den Prozesscharakter der Mathematik durch eigenes Tun herausarbeiten konnten.

Die Studierenden sollten in den Übungsstunden die Gelegenheit zur „aktiven Mitarbeit" erhalten, was auch bedeutete, Fragen und Lösungen gemeinsam zu erarbeiten. Dazu gehörte es, miteinander über die Inhalte ins Gespräch zu kommen und sich nicht hinter einer Abgabegruppe zu verstecken. Man musste Kommilitonen eigene Lösungen erklären und diese auch einer größeren Zuhörerschaft präsentieren. Es bestand die Chance, unter Anleitung Lösungen zu erarbeiten und anderen gezielt eigene Fragen zu stellen. Die Präsentation der Arbeitsergebnisse diente dabei nicht nur dem tieferen Verständnis des Erarbeiteten, sondern trainierte auch die für angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer so wichtige Fähigkeit, anderen selbst Verstandenes verständlich nahezubringen.

Um diesen Zielen gerecht zu werden, wurde vom traditionellen frontalen Vorrechnen weitestgehend abgesehen und hauptsächlich auf unterschiedliche Formen der **Gruppenarbeit** zurückgegriffen. Eine wichtige organisatorische Voraussetzung dafür war die Aufteilung der Korrekturen, sodass jeder Tutor die Studierenden seiner Übungsgruppe selbst korrigieren konnte. Dies ermöglichte einerseits einen Überblick über individuelle und allgemeine Schwierigkeiten bei Themen, andererseits die Auswahl von Studierenden mit besonders gelungenen Lösungen als „Experten", die dann die Lösungen den anderen vorstellen und Fragen dazu klären konnten. Dadurch konnte weitestgehend von vorgefertigten Musterlösungen abgesehen werden. Musterlösungen wurden besonders kritisch betrachtet, da es selten „die" richtige Lösung gibt, sondern unterschiedliche Menschen häufig unterschiedliche Lösungswege gehen. Eine Musterlösung verleitet dazu, diese Lösung abzuheften und sich nicht damit auseinanderzusetzen. Musterlösungen sind fertig und animieren selten zur Kommunikation oder zu Fragen. Gerade für die schwächeren Studierenden sind sie keine Hilfe, denn in der verknappten Form und der „fertigen" Darstellung schwächen sie die Schwachen oft noch mehr.

Im Rahmen des Projekts hat sich herausgestellt, dass die methodischen Formen besonders gut mit etwa 20 Übungsgruppenteilnehmern funktionieren. Der Verlauf einer **Übungsstunde** (90 Minuten) teilte sich in der Regel in vier Phasen auf. Zuerst wurden die Teilnehmer(innen) begrüßt und eventuelle Fragen geklärt. Anschließend wurde der Arbeitsauftrag erläutert und die Gruppenarbeit begann, etwa in Form eines **Gruppenpuzzles**. Hierbei fanden sich aufgabenweise „Expertengruppen" zusammen, die den Arbeitsaufträgen entsprechend Lösungen erarbeiteten und Präsentationen (zum Beispiel Plakate, Folien) erstellten. Alle Gruppenmitglieder mussten sich vergewissern, dass sie die erarbeiteten Ergebnisse auch tatsächlich verstanden und festgehalten hatten, und andernfalls nachfragen, denn in der folgenden Gruppenphase fanden sich die Experten zu neuen „Stammgruppen" zusammen, in denen jede Aufgabe durch einen Experten vertreten war. Die erarbeiteten Präsentationen dienten dabei zur Unterstützung.

Andere Arbeitsformen waren beispielsweise die Präsentation der Expertenlösungen im Plenum, zum Beispiel als Wandzeitung oder als Stationenlernen. Diese Form kann auch mit geeigneten Materialien durch den Tutor vorbereitet werden, beispielsweise durch Lösungsskizzen, die von den Studierenden weiter ausgearbeitet werden müssen. Die letzte Phase der Übungsstunde rief alle zum Plenum zusammen, um Fragen zum neuen Übungsblatt zu stellen oder Arbeitshinweise zu erhalten.

Die Methode der Gruppenarbeit ermöglicht dem Tutor, sich intensiv um einzelne Studierende zu kümmern (auch um besonders Befähigte) und sie gezielt zu beraten. Die „andere" Art der Vorbereitung lässt mehr Zeit, um sich besondere Fördermöglichkeiten zu überlegen oder die abgegebenen Lösungen ausführlicher zu korrigieren. Entlastend ist, dass in der Regel keine ausführlichen Musterlösungen entworfen werden müssen. Weiterhin ermöglicht die beobachtende Teilnahme eine bessere Lernfortschrittskontrolle durch Einsicht in die Arbeit des Einzelnen.

Neben der Arbeit in Kleingruppen und der Methode des Gruppenpuzzles bieten sich noch zahlreiche weitere Möglichkeiten an, um das konstruktive Element in den Übungsgruppen zu stärken. Bei der Besprechung der Zwischentests wurde beispielsweise das **Ich-Du-Wir-Prinzip** erprobt, bei dem sich die Studierenden zuerst mit den Korrekturen ihres eigenen Tests beschäftigten, um anschließend gemeinsam mit einem Partner Fragen zu klären und teilweise Partnerlösungen zu erarbeiten. Diese wurden dann in der Übungsgruppe diskutiert und festgehalten. Eine weitere Methode war die Anleitung zu Lerntagebüchern. Immer wieder wurden traditionelle Übungsaufgaben durch offenere Aufgaben ergänzt, bei denen die Studierenden über einzelne Themen reflektieren und sie in Zusammenhang bringen sollten. Minihausarbeiten, die Erstellung von themenbezogenen Portfolios und die Einrichtung eines Arbeitsseminars („Forum“) rundeten diesen methodischen Ansatz ab.

Andere Möglichkeiten eröffnet der Einsatz von **Präsenzaufgaben**, die besondere Gelegenheiten bieten, gemeinsam spezielle Techniken zu erlernen und mathematische Heuristiken einzuüben. Auch im Rahmen der Vorlesung können kleine Präsenzaufgaben eingestreut werden, die Verständnis fördern und durch den Methodenwechsel neue Motivation und Aufmerksamkeit herstellen können. Sofern es der Studienplan und die Kapazitäten zulassen, hat sich auch die Einrichtung von zusätzlichen Präsenzübungen oder Repetitorien bewährt, in denen die Studierenden gemeinsam vor Abgabe des Übungsblatts mit den Tutoren und den Kommilitonen Fragen und technische Details klären oder gemeinsam die Vorlesung nacharbeiten konnten. Insbesondere bestand bei guter Anleitung durch den Tutor die Chance, individuelle Lücken zu entdecken und aufzuarbeiten. Dieses Angebot hat wesentlich dazu beigetragen, die Studierenden in ihrer häuslichen Nacharbeit zu begleiten.

Die neuen Medien waren hilfreich, indem etwa ein Internet-Diskussionsforum zu den Veranstaltungen oder weiteres E-Learning-Material bereitgestellt wurde. Außerdem wurden Medien soweit wie möglich eingesetzt, um durch Visualisierung Verständnis zu erleichtern. In einem Computerpraktikum (zur Analytischen Geometrie) konnten die Studierenden begleitend zur Vorlesung die Visualisierungen selbst erstellen und somit die erlernte Theorie auf neue Weise „sehen“.

Visionen von Lehren und Lernen.

Die im Projekt **Mathematik Neu Denken** erprobte methodische Neuorientierung hatte in den beteiligten Fachbereichen und Instituten eine positive Wirkung, dennoch ist sie nur ein erster Schritt bei der Verbesserung der Lernsituation von Studierenden. Die Mahnung zur Entwicklung produktiver Lernumgebungen, zur Schaffung einer echten Balance von Instruktion und Konstruktion und zur Öffnung von Aufgaben (Vgl. Borneleit; Danckwerts et al. 2001, S. 83) bleibt bestehen.

Das Mathematikstudium umfasst in der Regel vierstündige Vorlesungen mit zweistündigen Übungen. Schon durch dieses Verhältnis wird deutlich, dass das traditionelle Studium den Instruktionscharakter und die Produktorientierung der Vorlesung in den Vordergrund stellt. Mathematik betreiben heißt aber, Mathematik selber machen, über Mathematik sprechen und Mathematik als Prozess erfahren. Noch scheint ein Mathematikstudium ohne Vorlesungen undenkbar, aber die Vision, im Mathematikstudium echtes Mathematiktreiben erfahrbar werden zu lassen, bleibt bestehen.

Der effektive Einsatz der neuen Medien ist eine große Herausforderung im Universitätsbetrieb. Die Möglichkeiten ihres Einsatzes in der Lehre im Fach Mathematik werden erst ansatzweise erprobt. Die neuen Medien können nicht nur visualisieren, sie können auch den Vorlesungsbetrieb entlasten und so Gelegenheiten für mehr themenbezogene Kommunikation schaffen. Das Für und Wider des Einsatzes neuer Medien und eine geeignete zugehörige Methodik werden bisher, insbesondere für das Fach Mathematik, in der Lehr-Lern-Forschung nur im Ansatz thematisiert.

Insgesamt wird deutlich, dass Mathematik lernen bedeutet, neben der eigenen Auseinandersetzung mit dem Thema die Möglichkeit des Austausches mit anderen zu haben, denn wie Werner Heisenberg in seiner Autobiographie „Der Teil und das Ganze“ (1969) feststellte: Wissenschaft wird von Menschen gemacht. Wissenschaft entsteht im Gespräch. Hinzu kommt: Die Universität als „universitas“, als Gemeinschaft der Lehrenden, und Lernenden hat die Aufgabe, diese Gemeinschaft auch erlebbar zu machen. Ein Mentorensystem könnte hierbei hilfreich sein, insbesondere für die Studienanfänger. Wichtig ist, dass die Tutoren und Mentoren auf ihre Aufgaben vorbereitet werden. Hierzu ist eine für die Mathematik spezifische Hochschuldidaktik zu entwickeln. Eine professionelle hochschuldidaktische Weiterbildung für das Fach Mathematik muss im Übrigen für alle Lehrenden ein Ziel bleiben.

Nicht-kanonische Lernangebote.

Ein Mathematikstudium soll Möglichkeiten schaffen, die Mathematik als Wissenschaft mit einer außerordentlichen Tiefe, aber ebenso als Wissenschaft mit einer beträchtlichen Breite zu erfahren. Nicht-kanonische Lernangebote können dazu beitragen. Einige Möglichkeiten sollen im Folgenden skizziert werden:

Klassische **Ringvorlesungen** stellen über ein Semester hinweg in Vorträgen die Sichtweisen unterschiedlicher Disziplinen zu einem festgelegten Thema vor. Eine Ringvorlesung „Was ist Mathematik?“ kann die Sichtweisen der verschiedenen Fachgebiete auf die Mathematik öffentlich machen. Ringvorlesungen könnten etwa zu folgenden Themen angeboten werden:
- Was ist Mathematik?
- Unendlichkeit
- Die 23 Hilbert'schen Probleme
- Symmetrie
- „Schöne“ Stücke der Mathematik
- Das „Buch der Beweise“
- „Dinosaurier“ der Mathematik („Ausgestorbenes“ in der Mathematik besichtigen)

Weitere Aspekte, die in die Konzeption einer solchen Ringvorlesung einfließen könnten, sind:
- Wie nachhaltig (zentral) sind die Forschungsfragen eines Teilgebietes?
- Ein Experte eines Teilgebietes berichtet jeweils über das Teilgebiet eines Kollegen.
- Wo steht die Forschung heute?
- Welche Grundprobleme werden in einem Forschungsgebiet behandelt, und welchen Zugriff liefert das Teilgebiet auf die Mathematik?

Mathematische Probleme und Problemlösestrategien: Wie in der Schule, so wird auch das Lernen von Mathematik an der Universität häufig als „Lernen auf Vorrat“ wahrgenommen, da die Herangehensweise an mathematische Probleme und Fragen nicht genügend thematisiert wird. Würden dagegen mathematische Problemlösestrategien im Studium reflektiert, könnten im gesamten Studienverlauf tiefere Einsichten in den Aufbau und die Ordnung der Mathematik möglich werden.

Mathematisches Modellieren: Zentral sind exemplarische Erfahrungen in der Mathematisierung realer Probleme, insbesondere bei zufallsbehafteten Vorgängen. Anhand von Beispielen aus der mathematischen Forschungspraxis könnten darüber hinaus Aspekte des innermathematischen Modellierens, zum Beispiel Diskretisieren und Interpolieren, als zentrale Aktivitäten mathematischen Arbeitens erlebt werden.

Mathematische Experimente: Mathematik wird in der Regel als erfahrungsunabhängige Wissenschaft wahrgenommen, die allein die Kognition anspricht und keine sinnlichen Erfahrungen ermöglicht. Im Sinne eines Lernens mit Kopf, Herz und Hand können konkrete mathematische Experimente („Mathematik zum Anfassen") aber besonders zu einem motivierten, aber auch reflektierten Umgang mit Mathematik einladen, indem sie vom Konkreten zum Abstrakten führen. Die Planung und Herstellung sinnhafter und aktivierender Experimente erfordert ein tiefes Verständnis und ein hohes Maß an eigenaktiver Auseinandersetzung mit einer mathematischen Frage und kann so nachhaltig dazu beitragen, das Bild von Mathematik zu verändern.

Mathematik – fachübergreifend: Mathematik ist weder in ihrer Geschichte noch in der modernen Forschung eine Wissenschaft, die völlig unabhängig von der Entwicklung anderer Wissenschaften ist. Im Gegenteil gibt es mit fast allen Wissenschaften entwicklungsträchtige Berührungspunkte, und zwar nicht nur mit den Natur- und Ingenieurwissenschaften. Ebenso haben die Geistes- und Sozialwissenschaften und die Künste besondere Verbindungen mit der Mathematik, die sich vielfältig thematisieren lassen. Ein Lehramtsstudent empfindet die Trennung seiner beiden Studienfächer oft als unüberbrückbar, insbesondere wenn eines davon Mathematik heißt. Ein Lernangebot in Mathematik könnte die Beziehung von Mathematik und dem weiteren Fach, zum Beispiel Philosophie, Musik, Physik, Biologie, Erdkunde thematisieren und so auch eine Brücke zum fächerübergreifenden Unterricht der Schule schlagen.

Exkursionen bieten die Möglichkeit, Mathematik als wirksame Wissenschaft auch außerhalb der Universität zu erfahren, zum einen im Bereich der mathematischen Anwendung in Industrie und Wirtschaft, zum anderen als Wissenschaft mit kulturgeschichtlichen Wurzeln in Museen und Science Centern. Exkursionen, vorzugsweise begleitet durch ein Seminar an der Universität, können zur Begegnung von Mensch und Mathematik einladen. Eine andere Möglichkeit, die Mathematik aus dem „Elfenbeinturm" der Universität herauszuholen, ließe sich innerhalb des Organisationsaufbaus der Universität leichter verwirklichen. Sie bestünde darin, aktive Mathematiker aus Wirtschaft, Industrie und dem Bildungssektor an die Hochschulen zum Erfahrungsaustausch und zu gemeinsamen Workshops einzuladen.

Sommerschulen bieten für Studierende und Dozenten an der Universität die Möglichkeit, außerhalb des starren Systems der Universität gemeinsam und vertieft an wissenschaftlichen Fragestellungen zu arbeiten. Besonders für Seminare bietet sich diese Form an, aber auch Vorlesungen im Rahmen von Sommerschulen sind denkbar. Darüber hinaus eröffnen sich soziale Möglichkeiten solcher kurzer intensiver Arbeitsformen, die zur selbst- und themenbezogenen Reflexion besonders einladen. Sommerschulen sind auch als Weiterbildungsangebote zu diskutieren.

Epilog.

Eine Studienreform in der Lehrerbildung muss die essenziellen Elemente, die zum Erwerb der geforderten fachbezogenen Professionalität beitragen, benennen und in einem Studienplan verorten. Diese Elemente beziehen sich zum einen auf die professionsbezogenen Inhalte eines Lehramtsstudiums im Fach Mathematik und zum anderen auf die angestrebte Reflexionsfähigkeit zukünftiger Lehrerinnen und Lehrer über das Fach Mathematik. Beide Aspekte sind auf vielfältige Weise miteinander verbunden.

Vor diesem Hintergrund enthält der vorgeschlagene Studiengang unverzichtbare Elemente, ohne die das Fachstudium nach Auffassung der Expertengruppe nicht mehr als hinreichend professionsbezogen gelten kann. Hierzu gehören

- elementarmathematische Erfahrungen im Rahmen der fachmathematischen Grundbildung (Teil der Basismathematik),
- Schnittstellenerfahrungen (als „Schulmathematik vom höheren Standpunkt"),
- Erfahrungen zur Reflexion über Mathematik (historisch/philosophisch/...),
- mathematikdidaktische Erfahrungen mit dem Schwerpunkt, mathematische Inhalte zugänglich zu machen,
- Erfahrungen der eigenaktiven Wissenskonstruktion.

Das hier favorisierte Modell erscheint gleichwohl auch unter vergleichsweise traditionellen Randbedingungen realisierbar.

Der von der Expertengruppe vorgeschlagene idealtypische Studiengang ist professions-orientiert gedacht: Mit seinen Schnittstellen- und fachdidaktischen Lehrangeboten enthält er bereits im Grundstudium dezidiert lehramtsspezifische Elemente. Der Studiengang ist zudem konsekutiv angelegt und damit prinzipiell kompatibel mit Bachelor-/Master-Strukturen.

Die Elemente „Basismathematik" und „Exemplarische fachliche Vertiefung" können für alle Mathematikstudierenden gleichermaßen angeboten werden und sind ein Angebot an die Polyvalenz der Studiengänge Bachelor-Mathematik und Mathematik für das gymnasiale Lehramt. Die elementarmathematisch orientierten Modulelemente im Rahmen der Basismathematik (Elementare Algebra und Zahlentheorie, Elementargeometrie) und die „Reflexion über Mathematik" können auch Teil des Wahlpflichtbereichs einer fachmathematischen Bachelorausbildung sein. Mit geeigneten Ergänzungen ist auch ein Wechsel innerhalb der Studiengänge möglich. Das unterliegende Motto lautet: keine maximale Polyvalenz, aber auch keine maximale Trennung.

Elemente eines idealtypischen Studienplans.

Studienplan für das gymnasiale Lehramt mit 70–80 SWS.

Basismathematik

38–42 SWS

- Analysis I
  6 SWS
- Analysis II
  6 SWS
- Gewöhnliche Differentialgleichungen
  2 SWS
- Lineare Algebra/Analytische Geometrie I
  6 SWS
- Lineare Algebra/Analytische Geometrie II
  4 SWS
- Einführung in die Stochastik
  6 SWS
- Elementare Algebra und Zahlentheorie
  4–6 SWS
- Elementargeometrie
  4–6 SWS

Schnittstelle

4–8 SWS

- Schulanalysis vom höheren Standpunkt
- Schulische Analytische Geometrie/Lineare Algebra vom höheren Standpunkt
- Schulstochastik vom höheren Standpunkt

Didaktik der Mathematik

14 SWS

- Mathematik zugänglich machen
  4 SWS
- Bildungstheoretische Reflexion
  2 SWS
- Mathematikbezogene Denkhandlungen
  2 SWS
- Diagnose und Förderung
  2 SWS
- Potenzial von Aufgaben
  2 SWS
- Praxiserfahrungen mit Begleitseminar

Exemplarische fachliche Vertiefung

8–10 SWS

Maß und Integral; Funktionentheorie; Funktionalanalysis; (Partielle) Differentialgleichungen; Numerische Mathematik; Differentialgeometrie; Projektive Geometrie; Galoistheorie; Zahlentheorie; Stochastik u. a. m.

- davon ein Seminar
- davon ein nicht-kanonisches Lernangebot

Kombinatorik; Graphentheorie; Kryptographie

Reflexion über Mathematik

4 SWS

Geschichte der Mathematik

Philosophie der Mathematik

Logik

Masterarbeit
2 SWS

Anhang.

Literatur.

Bauer; Partheil 2009 — Bauer, Thomas; Partheil, Ulrich: Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik, in: Math. Semesterber., 56 (2009), S. 85–103.

Beutelspacher; Danckwerts 2008 — Beutelspacher, Albrecht; Danckwerts, Rainer: Abschlussbericht „Mathematik Neu Denken“. Ein Projekt zur Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt, Siegen, Gießen 2008.

BLK 1997 — Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung (Hg.): Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“, (Materialien zur Bildungsplanung und Forschungsförderung, H. 60), Bonn 1997.

Borneleit; Danckwerts et al. 2001 — Borneleit, Peter; Danckwerts, Rainer; Henn, Hans-Wolfgang; Weigand, Hans-Georg: Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe, in: JMD, 22 (2001), H. 1, S. 73–90.

Danckwerts; Prediger; Vasarhelyi 2004 — Danckwerts, Rainer; Prediger, Susanne; Vasarhelyi, Eva: Perspektiven der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für die Sekundarstufen, in: DMV/GDM-Mitteilungen, 12 (2004), H. 2, S. 76–77.

Danckwerts; Nickel 2009 — Danckwerts, Rainer; Nickel, Gregor: „Mathematik Neu Denken“. Ein Projekt zur Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt. Abschlussbericht Zweite Phase, Siegen 2009.

Empfehlungen an die KMK 2008 — DMV; GDM; MNU: Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Empfehlungen von DMV, GDM, MNU, o. O. 2008. http://www.math.uni-sb.de/ag/lambert/LAHLAR/Standards-LehrerbildungMathematik.pdf

Freudenthal 1983 — Freudenthal, Hans: Didactical phenomenology of mathematical structures, (Mathematics Education Library), Dordrecht, Boston 1983.

Hefendehl-Hebeker 2003 — Hefendehl-Hebeker, Lisa: Didaktik der Mathematik als Wissenschaft. Aufgaben, Chancen, Profile, in: Jahresberichte der DMV, 105 (2003), H. 1, S. 3–29.

Hefendehl-Hebeker; Schuster 2006 — Hefendehl-Hebeker, Lisa; Schuster, Andreas: Probleme und Perspektiven der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik, Deutsche Telekom Stiftung, Bonn 2006.

Henze 2010 Henze, Norbert: Stochastik für Einsteiger, 8. Aufl., Wiesbaden 2010.

Klein 1924 Klein, Felix: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte, Bd. 1, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1924.

Krauss; Neubrand et al. 2008 Krauss, Stefan; Neubrand, Michael; Blum, Werner; Baumert, Jürgen; Brunner, Martin; Kunter, Mareike; Jordan, Alexander: Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie, in: JMD, 29 (2008), H. 3/4, S. 223–258.

Reichel 2000 Reichel, Hans-Christian: Brauchen wir eine spezielle Mathematik-Fachausbildung für Lehramtskandidaten? In: DMV-Mitteilungen, 8 (2000), H. 2, S. 33-36.

Singh 2000 Singh, Simon: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels, 4. Aufl., München 2000.

Sjuts 2003 Sjuts, Johann: Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag, in: JMD, 24 (2003), H. 1, S. 18–40.

Stroth et al. 2001 Stroth, Gernot; Törner, Günter; Scharlau, Rudolf; Blum, Werner; Reiss, Kristina: Vorschläge zur Ausbildung von Mathematiklehrerinnen und -lehrern für das Lehramt an Gymnasien in Deutschland, DMV-/GDM-Denkschrift zur Lehrerbildung, o. O. 2001. http://www.mathematik.de/ger/presse/pressemitteilungen/pdf/lehrer.pdf

Terhart 2000 Terhart, Ewald (Hg.): Perspektiven der Lehrerbildung in Deutschland. Abschlussbericht der von der Kultusministerkonferenz eingesetzten Kommission, Weinheim, Basel 2000.

Törner; Grigutsch 1994 Törner, Günter; Grigutsch, Stefan: „Mathematische Weltbilder“ bei Studienanfängern – Quintessenz einer Erhebung, in: Pickert, Günter; Weidig, Ingo (Hg.): Mathematik erfahren und lehren, Stuttgart 1994, S. 237–245.

Wagenschein 1970 Wagenschein, Martin: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken, Bd. 1, 2. Aufl., Stuttgart 1970.

Impressum.

Herausgeber
Deutsche Telekom Stiftung
Graurheindorfer Straße 153
53117 Bonn

Tel. 0228 181-92001
Fax 0228 181-92403
stiftung@telekom.de

Verantwortlich
Dr. Ekkehard Winter

Gestaltung und Produktion
SeitenPlan GmbH
Corporate Publishing,
Dortmund

Druck
Druckerei Schmidt,
Lünen

Stand
Juni 2010

Deutsche Telekom Stiftung